

Université du Québec
Institut National de la Recherche Scientifique–Télécommunications

**ALGORITHMES DE RECONSTITUTION DE
MESURANDES DYNAMIQUES
AVEC RÉGULARISATION MULTIPLE**

Par
Mohamed Ben Slima

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de Philosophiae doctor (Ph.D.)
Télécommunications

Décembre 1995

À mon père et à ma mère

À Najla

À mes frères et à mes soeurs

À tous ceux qui me sont très chers

Sommaire

Le développement de la science et de la technique entraîne une demande grandissante pour les mesures de diverses grandeurs physiques qui ne sont pas directement mesurables, et pour les mesures plus précises et plus rapides de grandeurs déjà mesurables. La reconstitution de mesurandes constitue (à côté de la conversion de mesurandes) un problème fondamentale de la métrologie. Il s'agit d'un problème inverse qui est mal posé au sens de Hadamard à cause de la présence du bruit qui affecte les mesures. La question de la régularisation du problème de reconstitution apparaît primordiale pour l'avancement de méthodes de reconstitution dans le cas de mesures complexes.

L'objectif principal de ce recherche consiste à apporter une contribution à la qualité d'un outil métrologique par l'application des méthodes avancées de traitement de signaux dans la reconstitution de mesurandes dynamiques.

Comme un système de mesure peut être aussi traité comme un cas particulier d'un système de communication, la méthodologie de recherche adoptée se base ainsi sur le traitement uniforme des problèmes de reconstitution en métrologie et en télécommunication. En ce sens deux applications ont été traitées. La première application en métrologie consiste en la correction de la résolution des analyses spectrométriques. La deuxième application en télécommunication consiste en l'analyse de la disparité des images en vue d'améliorer la qualité de reconstitution des images stéréoscopiques. Le développement d'algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques souvent avec régularisation multiple exige une identification de l'information *a priori* sur le problème en question et son exploitation judicieuse dans les algorithmes.

Deux algorithmes de reconstitution ont été proposés pour la première application. Ils sont basés sur l'approximation du mesurande par des fonctions splines cubiques combinée avec l'utilisation de régularisation multiple. Le premier algorithme est basé sur une méthode d'optimisation non linéaire avec contraintes. Il offre d'excellents résultats de reconstitution comparativement aux algorithmes de référence utilisés pour ce type d'application. Cependant, il nécessite un calcul fort complexe et un espace en mémoire très important. Le deuxième algorithme est basé sur l'utilisation du filtre de Kalman. Il offre notamment la possibilité d'une reconstitution en temps réel et aussi le traitement dans un environnement non stationnaire. En comparaison avec les algorithmes de référence, le deuxième algorithme est beaucoup moins complexe et offre une bonne exactitude de reconstitution. Les résultats de reconstitution obtenus pour des données spectrométriques réelles confirment l'efficacité des algorithmes proposés: ils permettent une amélioration de la résolution des analyses spectrométriques d'au moins d'un facteur de 10.

Deux algorithmes d'évaluation de disparité ont été proposés pour la deuxième application. L'idée de base de ces algorithmes consiste à appliquer un filtre auxiliaire de type passe-bas sur le modèle de données de sorte que nous faisons le transfert de la disparité de l'image à ce filtre en utilisant certaines suppositions. L'évaluation de la disparité se fera ainsi à partir de ce filtre en utilisant la technique d'adaptation

de la somme des différences au carré (SSD: *Sum of Squared Differences*). Le premier algorithme est basé sur la combinaison d'une approche variationnelle, utilisant la méthode de reconstitution avec la régularisation de Tikhonov, et une approche itérative de l'implantation de la technique SSD. L'avantage de cet algorithme repose sur le fait qu'il n'utilise aucune interpolation ni différentiation de l'image, d'où une grande réduction de la complexité de calcul. Cependant, il est limité à de faibles variations de la disparité. Le deuxième algorithme est basé sur la technique d'adaptation SSD. L'introduction du filtre auxiliaire a amélioré l'exactitude de l'évaluation de la disparité de l'ordre de 20 à 30 % par rapport aux algorithmes de référence utilisés pour ce type d'application.

Les résultats de ce recherche constituent une contribution méthodologique et algorithmique à la qualité d'un outil métrologique par l'application des méthodes avancées de traitement de signaux dans la reconstitution de mesurandes dynamiques. Les progrès réalisés dans la technologie d'intégration rendent possible une implantation de l'algorithme en silicium en arrivant à un processeur spécialisé pour la reconstitution de mesurandes. L'intégration fonctionnelle et technologique représente une tendance actuelle dans le développement du domaine du système de mesure. Ainsi, le résultat de ce projet contribue au développement de structures de mesure intégrées dédiées aux applications instrumentales.

Étudiant

Directeur de la thèse

Remerciements

Un projet de l'envergure d'une thèse représente l'aboutissement d'un long cheminement personnel et le fruit de plusieurs années de recherche. Il n'en demeure pas moins que sa réalisation implique bon nombre de personnes ayant contribué par leurs supports et leurs appuis à le rendre possible et dont nous ne pouvons faire abstraction.

En tout premier lieu, nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à Monsieur Andrzej Barwicz, professeur à l'université du Québec à Trois-Rivières et professeur invité à l'INRS, qui a bien voulu assumer la direction de cette thèse. La très grande disponibilité dont il a fait preuve, ses précieux conseils, sa patience et ses encouragements furent appréciés à leur juste valeur. Ma reconnaissance va également au codirecteur Monsieur Janusz Konrad pour ses remarques et ses conseils.

En deuxième lieu, nous remercions Monsieur Roman Z. Morawski, professeur à l'Institut Radioélectronique de l'École Polytechnique de Varsovie en Pologne, pour son étroite collaboration et ces fructueux conseils. Nous lui sommes très reconnaissant d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse. Nous tenons à exprimer aussi notre gratitude aux professeurs Monsieur Eric Dubois de l'INRS et Monsieur Leo P. Van Biesen de Vrije Universiteit de Bruxelles en Belgique pour leur aimable participation au comité d'évaluation.

Finalement, nous voudrions, par l'occasion qui nous est offerte, exprimer nos plus sincères remerciements à tous les collègues et camarades pour le support moral qu'ils nous ont apporté ainsi que pour tous les agréables moments passés ensemble. Nos remerciements et grâces s'adressent à tous les membres du personnel de la Direction de Coopération Internationale, sans qui notre séjour au Canada aurait été impossible.

Table des matières

<i>Sommaire</i>	i
<i>Remerciements</i>	iii
<i>Liste des figures</i>	ix
<i>Liste des tableaux</i>	xii
<i>Liste des symboles</i>	xiii
1 INTRODUCTION	1
1.1 Problématique	2
1.2 Objectif de la recherche	5
1.3 Méthodologie de la recherche	8
1.4 Structure de la thèse	11
2 FORMULATION DU PROBLÈME DE RECONSTITUTION DE MESURANDES DYNAMIQUES	13
2.1 Notions de base	13
2.2 Modèle de mesure	15
2.3 Étalonnage d'un système de mesure et reconstitution d'un mesurande	17
2.4 Classification des problèmes de reconstitution de mesurande	18
2.5 Caractérisation générale du problème de reconstitution de mesurandes	19

2.6	Exemples de reconstitution de mesurandes dynamiques	22
2.6.1	Revue générale	22
2.6.2	Reconstitution en spectrométrie	24
2.6.3	Reconstitution en télécommunication	25
3	ANALYSE DU PROBLÈME DE RECONSTITUTION DE MESURANDES DYNAMIQUES	29
3.1	Modélisation mathématique des données de mesure	29
3.2	Sources d'erreurs de reconstitution	30
3.3	Mal-conditionnement numérique du problème de reconstitution	32
3.4	Régularisation du problème de reconstitution	35
4	MÉTHODES ET ALGORITHMES DE RECONSTITUTION DE MESURANDES DYNAMIQUES	38
4.1	Classification et caractérisation générale	39
4.2	Algorithmes de référence utilisés	42
4.2.1	Algorithmes de référence utilisés pour l'application en spec- trométrie	42
4.2.2	Algorithmes de référence utilisés pour l'application en télécom- munication	49
4.3	Méthodologie de l'évaluation des algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques	55
4.3.1	Principe	55
4.3.2	Génération des données synthétiques	55
4.3.3	Acquisition des données réelles	56
4.3.4	Procédure d'évaluation des algorithmes	57

5	ALGORITHMES DE RECONSTITUTION PROPOSÉS POUR L'APPLICATION EN SPECTROMÉTRIE	58
5.1	Modèle mathématique des données de mesure pour la correction de la résolution des analyses spectrométriques	58
5.2	Choix des méthodes de reconstitution	59
5.3	Description des algorithmes proposés	61
5.3.1	Algorithme OPT_SPL	61
5.3.2	Algorithme KAL_SPL	69
5.4	Résultats de l'évaluation des algorithmes	79
5.4.1	Résultats avec des données synthétiques	79
5.4.2	Résultats obtenus pour des données réelles	87
5.5	Comparaison des algorithmes proposés avec les algorithmes de référence	91
5.6	Appendice	94
5.6.1	Appendice A: Équation (5.15)	94
5.6.2	Appendice B: Algorithme KAL_SPL modifié	96
6	ALGORITHMES DE RECONSTITUTION PROPOSÉS POUR L'APPLICATION EN TÉLÉCOMMUNICATION	99
6.1	Modèle mathématique des données de mesure pour l'estimation de la disparité	99
6.2	Revue de la littérature	101
6.3	Choix des méthodes de reconstitution	103
6.4	Description des algorithmes proposés	104
6.4.1	Algorithme TIKH_SSD	104
6.4.2	Algorithme DIR_SSD	107

6.5	Résultats de l'évaluation des algorithmes	109
6.5.1	Résultats avec des données synthétiques	109
6.5.2	Résultats avec les données réelles	119
6.6	Comparaison des algorithmes proposés avec les algorithmes de référence	123
7	CONCLUSION	126
7.1	Contribution méthodologique	127
7.2	Contribution algorithmique	127
7.2.1	En spectrométrie	127
7.2.2	En télécommunication	128
7.3	Perspectives de développements futurs	129
7.3.1	En spectrométrie	129
7.3.2	En télécommunication	131
	BIBLIOGRAPHIE	132

Liste des figures

1.1	Schéma général d'un système de mesure	2
1.2	Schéma général d'un système de communication	9
2.1	Modèle général d'un système de mesure	15
2.2	Spectre de la lumière synthétisée par deux lasers pour différentes résolutions r du spectromètre ANRITSU MV02 Serie (a) $r = 0.1 \text{ nm}$ (b) $r = 1 \text{ nm}$ (c) $r = 2 \text{ nm}$ (d) $r = 5 \text{ nm}$	26
3.1	Espace des solutions admissibles	36
5.1	Les signaux spectrométriques synthétiques, $N = 128$ et $\Delta\lambda = 1$	80
5.2	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL (a) et l'algorithme OPT_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 1$, $\Delta\lambda' = N/M \Delta\lambda$ et $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 0$	81
5.3	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL (a) et l'algorithme OPT_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 1$, $\Delta\lambda' = N/M \Delta\lambda$ et $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-6}$	81
5.4	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL (a) et l'algorithme OPT_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 1$, $\Delta\lambda' = N/M \Delta\lambda$ et $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-4}$	82
5.5	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $\Delta\lambda = 1$, $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 0$	84
5.6	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $\Delta\lambda = 1$, $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-6}$	85

5.7	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $\Delta\lambda = 1$, $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-4}$	85
5.8	Variation de l'erreur de reconstitution ε_r en fonction du paramètre β (a) $\check{\sigma}_\eta^2 = 0$ (b) $\check{\sigma}_\eta^2 = 10^{-4}$	86
5.9	Données spectrométriques réelles obtenus avec le spectromètre MILTON-ROY Spectronic 3000 Array; $N = 128$, $\Delta\lambda = 0.37$ (a) résultats de mesure $\tilde{y}(\lambda)$ (b) réponse impulsionnelle du spectromètre $g(\lambda)$.	88
5.10	Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL+ (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données réelles; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 0.37$, $\Delta\lambda' = 0.379$	88
5.11	Résultats de reconstitution pour les données réelles obtenus avec l'algorithme KAL_SPL+; (a) $N = 512$, $\Delta\lambda = .01$, $\beta_{opt} = 9 \cdot 10^3$ (b) $N = 512$, $\Delta\lambda = .01$, $\beta_{opt} = 10^4$	89
5.12	Spectre de la lumière synthétisée par deux lasers mesuré avec le spectromètre ANRITSU MV02 Serie (a) $r = 2 \text{ nm}$ et (b) $r = 5 \text{ nm}$; $g(\lambda)$ identifiée expérimentalement (c) $r = 2 \text{ nm}$ et (d) $r = 5 \text{ nm}$	89
5.13	Résultats de reconstitution obtenus avec KAL_SPL+ modifié pour les données acquises avec la résolution (a) $r = 2 \text{ nm}$ et (b) $r = 5 \text{ nm}$. . .	90
6.1	Étude de l'algorithme TIKH_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 7.5 \cdot 10^3$ et $SNR = 45 \text{ dB}$ (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\check{x}(n)$, (c) résultat de déconvolution ($\varepsilon_{rec} = 7.2 \cdot 10^{-3}$), (d) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=28$	111
6.2	Erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W . . .	111
6.3	Étude de l'algorithme TIKH_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 7.5 \cdot 10^3$ et $SNR = 45 \text{ dB}$ (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\check{x}(n)$, (c) résultat de déconvolution ($\varepsilon_{rec} = 9 \cdot 10^{-3}$), (d) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=36$	112
6.4	Erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W . . .	112
6.5	Étude de l'algorithme TIKH_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 7.5 \cdot 10^3$ et $SNR = 45 \text{ dB}$ (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\check{x}(n)$, (c) résultat de déconvolution ($\varepsilon_{rec} = 1.8 \cdot 10^{-2}$), (d) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=36$	113
6.6	Erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W . . .	113

6.7	Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45$ dB : (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=10$, (d) erreur ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W	115
6.8	Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45$ dB : (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=10$, (d) erreur ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W	116
6.9	Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45$ dB : (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=6$, (d) erreur ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W	117
6.10	Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45$ dB : (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=16$, (d) erreur ε_r en fonction de la largeur de la fenêtre W	118
6.11	Images stéréoscopiques réelles : image gauche	120
6.12	Images stéréoscopiques réelles : image droite	120
6.13	Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données réelles pour $N = 720$, $\sigma_h^2 = 4$, (a) ligne gauche $I_g(n)$, (b) ligne droite $I_d(n)$, (c) disparité estimée avec $W=30$	121
6.14	Disparité entre les deux images stéréoscopiques réelles obtenu avec DIR_SSD avec $W=15$ et $\sigma_h^2 = 4$	122
6.15	Disparité entre les deux images stéréoscopiques réelles obtenu avec DIR_SSD avec $W=30$ et $\sigma_h^2 = 4$	122

Liste des tableaux

5.1	Erreur de reconstitution ε_r et rapport signal-bruit amélioré ρ_a pour les algorithmes OPT_SPL et OPT_SPL+ obtenus pour différents σ_η^2 . . .	82
5.2	Erreur de reconstitution ε_r , rapport signal-bruit amélioré ρ_a et β_{opt} pour les algorithmes KAL_SPL et KAL_SPL+ obtenus pour différents σ_η^2	86
5.3	Comparaison des valeurs de l'erreur de reconstitution ε_r pour les algorithmes proposés et les algorithmes de référence pour les données synthétiques	91
5.4	Comparaison de la complexité de calcul entre KAL_SPL et les algorithmes récursifs de référence	92
5.5	Nombre d'opérations arithmétiques pour KAL_SPL et les algorithmes récursifs de référence	93
6.1	Erreur d'estimation (ε_r) pour la fonction de disparité présentée à la figure 6.7.(b)	123
6.2	Erreur d'estimation (ε_r) pour la fonction de disparité présentée à la figure 6.8.(b)	124
6.3	Erreur d'estimation (ε_r) pour la fonction de disparité présentée à la figure 6.9.(b)	124

Liste des symboles

\mathbf{L}^2	: Espace Hilbert des fonctions réelles du temps de carré intégrable
\mathbf{W}_2^p	: Espace Sobolev des fonctions réelles du temps de carré intégrable
\mathbf{H}_η	: Ensemble bornée des vecteurs qui modélisent le bruit η
\mathbf{H}_Y	: Ensemble bornée des vecteurs des résultats crus de mesure y
\mathbf{H}_X	: Ensemble bornée des solutions admissibles
\mathbf{X}	: Espace des nombres réelles pour le mesurande x
\mathbf{V}	: Espace des nombres réelles pour les grandeurs d'influence \mathbf{v}
\mathbf{T}	: Espace des nombres réelles pour le temps t
$\mathbf{X}(\mathbf{T})$: Espace des fonctions réelles du temps
E_a	: Espace des solutions admissibles
\mathcal{S}_3	: Ensemble des fonctions splines cubiques
D^{ref}	: Ensemble des données de référence
\mathcal{M}	: Opérateur du modèle direct de mesure
\mathcal{R}	: Opérateur de reconstitution de mesurande
\mathcal{F}	: Opérateur du transformée de Fourier
\mathcal{L}	: Opérateur du transformée de Laplace
$*$: Opérateur de convolution
∇	: Opérateur du Laplacien
SNR	: rapport signal-bruit
\circ	: valeur exacte
$\hat{\cdot}$: valeur estimée
$\tilde{\cdot}$: valeur bruitée
x	: grandeur à reconstituer - mesurande ou disparité
y	: résultat cru de mesure
g	: réponse impulsionnelle du système de mesure
h	: réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas

\mathbf{v}	: vecteur des grandeurs d'influence
\mathbf{s}	: vecteur des grandeurs de stimulation
η	: bruit de mesure
ξ	: processus générateur
I_g	: image stéréoscopique gauche ou une ligne de cette image
I_d	: image stéréoscopique droite ou une ligne de cette image
I_{gh}	: image stéréoscopique gauche filtrée par h
t	: grandeur scalaire modélisant le temps
λ	: grandeur scalaire modélisant la longueur d'onde
ω	: pulsation
$\mathcal{X}(j\omega)$: $\mathcal{F}\{x(t)\}$ transformée de Fourier de $x(t)$
$\mathcal{Y}(j\omega)$: $\mathcal{F}\{y(t)\}$ transformée de Fourier de $y(t)$
$\mathcal{G}(j\omega)$: $\mathcal{F}\{g(t)\}$ transformée de Fourier de $g(t)$
$\mathcal{N}(j\omega)$: $\mathcal{F}\{\eta(t)\}$ transformée de Fourier de $\eta(t)$
$X(s)$: $\mathcal{L}\{x(t)\}$ transformée de Laplace de $x(t)$
$Y(s)$: $\mathcal{L}\{y(t)\}$ transformée de Laplace de $y(t)$
$G(s)$: $\mathcal{L}\{g(t)\}$ transformée de Laplace de $g(t)$
N	: nombre d'échantillons des résultats crus de mesure
M	: nombre d'échantillons du mesurande
T	: intervalle de temps ou support du mesurande
Δ_Y	: incertitude sur les résultats crus de mesure
Δ_X	: limite supérieure de l'erreur de reconstitution
Δx	: variation du grandeur x
$\overline{\Delta \mathbf{x}^{ref}}$: limite de l'erreur absolue du vecteur \mathbf{x}^{ref}
$\overline{\Delta \mathbf{v}^{ref}}$: limite de l'erreur absolue du vecteur \mathbf{v}^{ref}
$\overline{\Delta \mathbf{y}^{ref}}$: limite de l'erreur absolue du vecteur \mathbf{y}^{ref}
x_{max}, x_{min}	: valeur maximale et minimale de x
$\lambda_{max}, \lambda_{min}$: longueur d'onde maximale et minimale
$\Delta \lambda$: pas de discrétisation de l'axe λ
$\lambda_n = n\Delta \lambda$: grille de discrétisation de l'axe λ

$\Delta\lambda'$: pas de discrétisation de l'axe λ'
$\lambda_m = m\Delta\lambda'$: grille de discrétisation de l'axe λ'
Ld, Ln	: ordre du dénominateur et de numérateur de $G(s)$
n_k	: coefficients du numérateur de $G(s)$, $k = 1, \dots, Ln$
d_k	: coefficients du dénominateur de $G(s)$, $k = 1, \dots, Ld$
$x_n = x(\lambda_n)$: échantillon de $x(\lambda)$ prélevé en $\lambda = \lambda_n$
$\{x_n\}$: séquence d'échantillons de $x(\lambda)$
$x_n^{(k)}$: dérivée k -ième de x_n
$y_n = y(\lambda_n)$: échantillon de $y(\lambda)$ prélevé en $\lambda = \lambda_n$
$\{y_n\}$: séquence d'échantillons de $y(\lambda)$
$g_n = g(\lambda_n)$: échantillon de $g(\lambda)$ prélevé en $\lambda = \lambda_n$
$\{\eta_n\}$: séquence d'échantillons de η
$\{\xi_n\}$: séquence d'échantillons de ξ
\mathbf{p}	: vecteur des paramètres du splines cubiques
\mathbf{p}_I	: vecteur des paramètres indépendants du splines cubiques
\mathbf{p}_D	: vecteur des paramètres dépendants du splines cubiques
$x(\lambda; \mathbf{p})$: mesurande paramétré par le vecteur \mathbf{p}
$w_{ij}(\lambda)$: polynômes fonction de λ d'ordre 3, $i, j = 0, 1$
σ_η^2	: variance du bruit de mesure
$\check{\sigma}_\eta^2$: estimé <i>a priori</i> du variance du bruit de mesure
σ_ξ^2	: variance du processus générateur
$\check{\sigma}_\xi^2$: estimé <i>a priori</i> du variance du processus générateur
α	: paramètre de régularisation
β	: $\check{\sigma}_\xi^2 / \check{\sigma}_\eta^2$
β_{opt}	: valeur optimale de β
ε_e	: erreur quadratique moyenne
ε_r	: erreur quadratique moyenne relative
ρ_a	: rapport signal-bruit amélioré
$\mathbf{r}[\mathbf{x}]$: fonction de relaxation
\mathbf{u}	: vecteur d'état continu

\mathbf{A}	: matrice d'état continu
\mathbf{b}	: vecteur d'entrée du système continu
\mathbf{c}	: vecteur de sortie du système continu
\mathbf{z}	: vecteur d'état discret
Φ	: matrice de transition d'état
\mathbf{r}	: vecteur d'entrée du système discret
\mathbf{h}	: vecteur de sortie du système discret
Σ_n^+	: matrice de covariance de l'erreur de prédiction
Σ_n	: matrice de covariance de l'erreur d'estimation
Σ_∞	: matrice de covariance stationnaire de l'erreur d'estimation
\mathbf{k}_n	: vecteur gain de Kalman
\mathbf{k}_∞	: vecteur gain de Kalman stationnaire
W	: largeur du fenêtre
$\mathbf{0}_{n,m}$: matrice zéro de dimension $n \times m$
\mathbf{I}_n	: matrice identité d'ordre n
$[\]^T$: vecteur ou matrice transposé
$E[\]$: espérance mathématique
$\text{Ré}[\]$: partie réelle
$J[\]$: critère d'optimisation
$\mathbf{1}(\cdot)$: échelon unité
$\delta(\cdot)$: impulsion de Dirac
<i>diag</i>	: matrice diagonale
<i>dim</i> (.)	: dimension d'une matrice ou d'un vecteur
<i>trace</i> {.}	: trace d'une matrice
arg	: argument
inf	: infimum
sup	: supremum
$\ \cdot \ $: norme euclidienne

Chapitre 1

INTRODUCTION

En 1877, quand le physicien Lord Rayleigh voulait déterminer la distribution de la densité d'une corde à partir de la connaissance de ses vibrations, il s'est confronté à un *problème inverse*. Son objectif était de déduire la forme d'une caractéristique physique (densité de la corde) à partir de l'observation d'une autre caractéristique physique (vibration de la corde) reliée avec la première de façon causative.

En traitement de signal, des problèmes similaires à cette situation sont très fréquents. Ils se posent à chaque fois que nous avons des observations d'un signal qui a subi des distorsions ou des transformations ou bien qui a été incomplètement mesuré. Dans ce cas, l'objectif principal serait de supprimer ses distorsions, défaire ses transformations ou compléter les informations manquantes sur ce signal.

En général, ces problèmes inverses sont des problèmes de reconstitution de signaux et se rencontrent dans les diverses applications du traitement numérique de signaux. Ces problèmes ont fait l'objet de nombreuses études à cause de leur importance pratique et de leur intérêt théorique. La littérature qui traite les problèmes de reconstitution est abondante et très variée, puisqu'ils concernent tous les domaines d'ingénierie, de la physique appliquée et en particulier la métrologie. Nous pouvons citer de façon non exhaustive les mesures optiques, environnementales, spectrométriques, sismiques, radioastronomiques, calorimétriques et, bien sûr, les télécommunications en général.

1.1 Problématique

La *mesure* peut être présentée aux différents niveaux de généralité et de différents points de vues. En particulier, une définition générale a été proposée par Finkelstein (1975):

“ la mesure est un procédé empirique et opérationnel d’application des nombres à des membres d’une classe d’aspects ou de caractéristiques de l’univers empirique suivant des règles bien définies. Les règles sont si précises que le nombre associé à une entité le décrit ... ” [1]

et le dictionnaire internationale de la métrologie la résume comme suit [2]:

“la mesure est l’ensemble des opérations ayant pour objective de déterminer la valeur d’une quantité ”(2-2.01)

La même s’applique à un nombre grandissant de méthodes de mesure, à l’instrumentation correspondante et à des problèmes de mesure décrits en utilisant différentes terminologies [3, 4, 5].

En terme de la théorie de système d’information (utilisant le concept du système, du signal et de l’information), nous pouvons définir la mesure comme une procédure d’extraction de l’information désirée du signal, appelé *signal de mesure*, et la présenter sous une forme utile, appelée *résultat de mesure* [6, 7].

Un schéma général d’un système de mesure [8], peut être présenté de la façon montrée sur la figure 1.1.

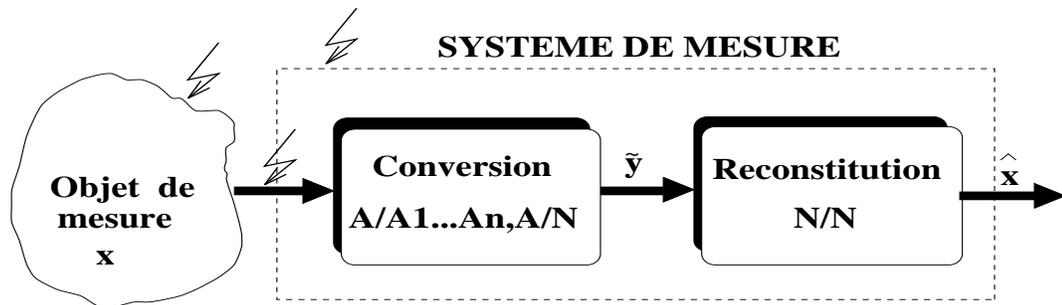


Figure 1.1: Schéma général d’un système de mesure

Sur cette figure:

- \mathbf{x} est *le mesurande*; une caractéristique empirique d'un objet de mesure dont la détermination constitue l'objectif du processus de mesure; une grandeur à mesurer, généralisée; par exemple: un vecteur de grandeurs scalaires, une relation (fonctionnelle) entre deux ou plusieurs grandeurs scalaires, une fonctionnelle scalaire d'un vecteur de grandeurs scalaires.
- $\tilde{\mathbf{y}}$ est *le résultat brut de mesure*; résultat de conversion – un signal électrique qui représente le mesurande et qui est obtenu à la sortie d'un canal de mesure comprenant un objet de mesure, des capteurs et leurs interfaces, les circuits du conditionnement et de la conversion analogique–numérique.
- $\hat{\mathbf{x}}$ est *le résultat final de mesure*; un estimé du mesurande obtenu à partir du résultat de conversion, en utilisant l'information *a priori* concernant les modèles mathématiques du canal de mesure, du bruit de conversion, des grandeurs d'influence ainsi que du mesurande.
- \rightsquigarrow représente le bruit de conversion; une perturbation parasite du résultat de conversion qui représente toutes les influences aléatoires agissant sur les signaux dans la chaîne de mesure.

La transformation de l'information de mesure dans le processus de mesure peut être décomposée logiquement en deux parties:

- **conversion**, qui transfère l'information de mesure dans un domaine de phénomènes facilement interprétables (p. ex. signaux électriques, codes digitaux);
- **reconstitution**, qui interprète le résultat de conversion (le résultat brut de mesure $\tilde{\mathbf{y}}$) en résultat final de mesure $\hat{\mathbf{x}}$.

L'élément clef dans la reconstitution est le modèle mathématique de la relation entre le résultat brut de mesure $\tilde{\mathbf{y}}$ et le mesurande $\hat{\mathbf{x}}$. Ce modèle est identifié et estimé pendant le processus d'étalonnage.

Pour les systèmes de mesure linéaires et invariants, qui caractérisent la grande majorité des applications en métrologie, un modèle, souvent utilisé, est celui basé sur la notion de convolution:

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

où $x(t)$ est le mesurande, $y(t)$ est le résultat brut de mesure sans le bruit et $g(t)$ est la réponse impulsionnelle du bloc de conversion. Lorsque la bande passante du système de mesure devient suffisante pour observer le mesurande, la fonction $g(t)$ tend vers l'unité du produit de convolution, c'est-à-dire à la distribution de Dirac, et le résultat brut de mesure devient identique au mesurande. La finesse de la fonction $g(t)$ dépend, en général, de paramètres métrologiques de l'instrument de mesure utilisé sur lesquels l'utilisateur peut agir (pour certains types d'instruments). Mais, pour un instrument donné, il existe une limitation fondamentale qui impose une valeur maximale au *pouvoir de résolution*, valeur en deçà de laquelle nous ne pouvons pas détecter des détails du mesurande dont la taille est plus grande que cette limite. Cette limitation entraîne une distorsion du mesurande qui fait que le résultat brut de mesure $\tilde{y}(t)$, issu du bloc de conversion, ne représente plus fidèlement la grandeur que l'on désire atteindre: le mesurande est filtré. De plus, ce résultat imparfait est perturbé additivement par les diverses erreurs de mesure ainsi que par le bruit et qui forment une source d'instabilité. À partir de cette situation, il faudra déconvoluer le résultat brut de mesure $\tilde{y}(t)$ pour obtenir un estimé satisfaisant du mesurande $x(t)$. En d'autres mots, il faudra résoudre l'équation intégrale (1.1) pour reconstituer le mesurande; c'est le problème de "*déconvolution*" un cas particulier du problème de "*reconstitution de mesurandes*".

La résolution du problème de reconstitution de mesurandes, en présence des erreurs qui affectent les mesures, n'est absolument pas triviale. Il s'agit d'un problème inverse qui est *mal posé* (au sens de Hadamard [9]). L'exactitude de la solution n'est plus alors garantie même si la transformation du mesurande dans le système de mesure est très exacte. Nous ne pouvons envisager de solutions acceptables qu'à l'aide de contraintes physiques et externes, qui sont déterminées par les informations

dites *a priori* que nous possédons sur le problème en question. En d'autres termes, il faudra **régulariser** ce problème [10].

La reconstitution de mesurandes permet, sous certaines conditions, de réduire les erreurs de mesure causées par les imperfections du système de mesure. Ainsi, par l'application des techniques de traitement de signaux complexes, nous pouvons corriger les imperfections métrologiques de l'instrument de mesure sans le changer ou modifier la technologie qui est toujours coûteux et parfois impossible.

Le compromis coût-performance d'un instrument de mesure est en train de se déplacer grâce aux développements extrêmement rapide des technologies d'intégrations de processeurs spécialisés de traitement de signal. Cela indique qu'il sera possible dans plusieurs applications métrologiques de disposer de processeurs spécialisés pour la reconstitution de signaux. Nous pouvons alors associer un instrument de faible résolution (minimisation des coûts) avec un processeur spécialisé pour la reconstitution qui va améliorer la résolution de l'instrument. Ces développements en microinformatique et en techniques de traitement de signaux vont, certes, modifier le paysage de l'instrumentation conventionnelle.

1.2 Objectif de la recherche

Les besoins en mesures de plus en plus précises et rapides, de différentes grandeurs physiques, jusqu'à présent non mesurable, résultent notamment du développement de l'ingénierie (la commande en temps réel, la robotique, le diagnostic préventif des machines, etc.), des télécommunications, de la protection de l'environnement (surveillance et gestion environnementale), de la médecine et de la pharmacologie.

Les progrès récents dans les domaines connexes et particulièrement dans le domaine de traitement de signaux numériques et de microélectronique, ouvrent les possibilités d'implantation des algorithmes en technologie VLSI et facilitent l'utilisation dans la reconstitution des modèles mathématiques nécessitant une capacité de calcul considérable. La technologie VLSI jumelée avec la technologie du micromachining

et de l'optique intégrée ouvrent une très grande possibilité d'intégration des systèmes de mesure. Dans ce contexte, il devient très pertinent et attrayant d'explorer la possibilité d'amélioration de la qualité des mesures, en développant les algorithmes sophistiqués de traitement numérique de signaux.

L'objectif principal de ce recherche consiste à apporter une contribution à la qualité d'un outil métrologique par l'application des méthodes avancées de traitement de signaux dans la reconstitution de mesurandes dynamiques.

Cet objectif général peut être décomposé en des objectifs partiels:

- étude des méthodes de reconstitution les plus pertinentes et des algorithmes qui y sont utilisés;
- développement de nouveaux algorithmes de reconstitution pour l'application en spectrométrie en vue de l'amélioration de l'exactitude et de la vitesse de la mesure;
- développement de nouveaux algorithmes de reconstitution pour l'application en traitement d'images en télécommunication en vue de l'amélioration de l'exactitude et de la vitesse du traitement;

En spectrométrie: La spectrométrie est, à l'heure actuelle, l'outil indispensable de recherche et d'analyse de plusieurs sciences et techniques. Des milliers de spectromètres sont journallement employés, non seulement dans les grands laboratoires chimiques, mais les industries les plus diverses en font usage pour contrôler leurs fabrications. Les exemples les plus classiques des milieux utilisant les spectromètres sont les milieux biologiques en général (médecine, pharmacologie, etc.), l'environnement (mesure et analyse des polluants atmosphériques et des eaux), les industries pétrolières, etc. Les spectres obtenus, grâce à ces spectromètres, sont des outils puissants pour l'identification et l'analyse des substances inconnues, la mesure quantitative des constituants de mélanges complexes et l'étude de leur nombreux paramètres physico-chimiques. Mais, la qualité de mesure de ces spectres

dépend fortement du pouvoir de résolution de l'instrument utilisé. En fait, c'est ce paramètre métrologique qui caractérise essentiellement, en terme de coût, un appareil spectrométrique.

L'instrumentation moderne est progressivement confronté à des analyses de plus en plus complexes, liées aux nombres important de constituants présents et aux quantités extrêmement faibles à détecter. La demande aux analyses spectrométriques est devenue grandissante dans les laboratoires les plus diverses (environnementales, biochimiques, physiques, etc.) et le besoin pour diminuer les coûts des analyses à haute résolution est devenu très important. Également le développement de nouveaux outils d'analyse intégrés et miniaturisés, apte à travailler sur le terrain, est devenu indispensable pour le monitoring en temps réel.

Une possibilité attractive pour staisfaire ce besoin est d'utiliser les algorithmes de reconstitution de mesurandes pour améliorer les paramètres métrologiques d'un instrument de mesure afin de compenser les limitations technologiques.

En télécommunication: L'analyse de la disparité des images peut être définie comme étant la détermination des différences géométriques entre deux images ou plus de la même scène ou de scènes similaires. Ces différences sont le résultat d'une parallaxe binoculaire, mouvement d'objets dans la scène, etc. La disparité est une propriéité générale des images qui peut être utilisée dans plusieurs applications. La plupart des applications concernent la vision en relief d'images fixes pour l'industrie, la cartographie aérienne, la météorologie (recalage d'images satellite), la médecine, la robotique (dans le cadre plus général de la vision par ordinateur). Dans ces applications, l'évaluation de disparité permet d'accéder à la profondeur absolue des points de la scène traitée.

De plus, la transmission de séquence d'images stéréoscopiques nécessite le transport d'une très grande quantité d'information. La connaissance de la disparité permet de réduire la quantité de symboles à transmettre par le fait qu'on peut coder et transmettre seulement une des deux images. Au récepteur, cette image avec l'information sur la disparité sont utilisées pour la reconstitution de l'autre image de la paire

stéréoscopique. La qualité de reconstruction des images (2D ou 3D) repose donc essentiellement sur la fiabilité et la précision de l'information sur la disparité.

1.3 Méthodologie de la recherche

À l'heure actuelle le design de plusieurs systèmes de mesure exige une contribution interdisciplinaire significative. Une grande quantité d'informations est accumulée dans de nombreux champs de la science et de la technologie, et disponible pour les concepteurs de systèmes de mesure. Une approche purement additive au traitement de toute cette information est impensable ni dans la pratique du design ni dans l'enseignement. Pour être apte à utiliser correctement toutes ces connaissances, il existe un besoin d'une approche suffisamment générale qui faciliterait le traitement de différents cas de mesure et qui aiderait à l'association de meilleurs éléments d'informations de différents champs concernant les systèmes de mesure à concevoir. C'est la principale motivation des "approches unifiées" des problèmes de mesure [4, 5, 6] lesquelles par moyen d'abstraction rendent possible à maîtriser une grande quantité de connaissances en utilisant un système de concepts et de règles relativement limités.

L'approche systémique de mesure électrique [7] est un cas particulier de cette tendance. Elle propose une vision uniforme de la problématique suivant laquelle les instruments (système) de mesure sont des cas particuliers d'un système physique qui accomplit sa fonction par le traitement de signaux. Mettant en évidence l'aspect structurel de mesure, cette approche introduit un niveau intermédiaire entre le niveau de détails de réalisation et le modèle général de mesure. Pour un cas particulier de mesure, la correspondance entre la théorie générale et les détails d'implantation est plus visible. Pour les différents cas de mesure les similitudes fonctionnelles et les différences d'implantation sont également mieux visibles.

L'approche unifiée à la reconstitution de mesurandes [8] démontre à son tour la

possibilité de voir de façon uniforme la problématique de cette partie du processus de mesure.

D'autre part, un système de mesure peut être aussi traité comme un cas particulier d'un système de communication présenté à la figure 1.2.

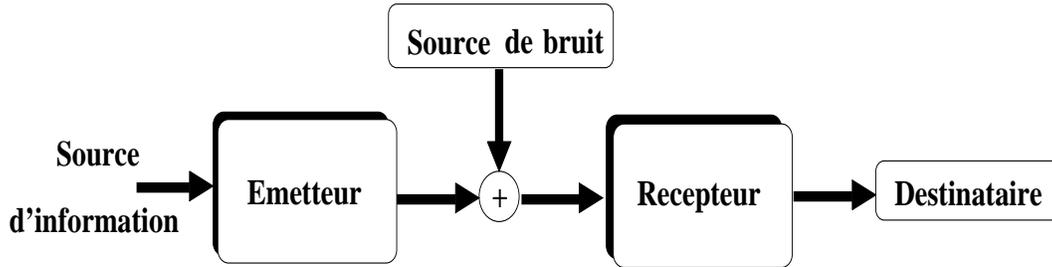


Figure 1.2: Schéma général d'un système de communication

En comparant ce schéma avec celui du système de mesure présenté à la figure 1.1 (ou avec le schéma plus détaillé à la figure 2.1), nous pouvons conclure que la correspondance suivante existe entre les deux structures:

- objet de mesure \sim source d'information;
- bloc de conversion \sim émetteur;
- bloc de reconstitution \sim récepteur;
- utilisateur \sim destinataire;

En plus, la source du bruit dans le système de communication correspond au source d'erreurs de mesure. Cette conclusion nous permet d'utiliser les méthodes de traitement de signaux développées dans le domaine des télécommunications pour la conception des systèmes de mesure.

Ainsi, la méthodologie de recherche adoptée dans cette thèse se base sur le traitement uniforme des problèmes de reconstitution en métrologie et en télécommunication. L'étude des différents algorithmes existants pour la reconstitution de mesurandes en métrologie et en télécommunication, nous permettra de comprendre les possi-

bilités et les limitations de ces algorithmes. Les résultats de cette étude serviront aussi comme base algorithmique de référence pour l'évaluation des algorithmes développés et proposés dans cette thèse.

L'évaluation des algorithmes de reconstitution, aussi bien de référence que ceux proposés, se fera en utilisant les critères suivants:

- exactitude de la reconstitution comme étant un critère essentiel de la qualité de l'algorithme;
- la vitesse de reconstitution; dans plusieurs cas également essentielle vue que c'est un facteur de qualité qui englobe les deux éléments soient: la vitesse et l'exactitude;
- la complexité de calcul, particulièrement important dans les applications météorologiques dans les systèmes de mesure intégrés où les algorithmes sont prévus pour être implantés "en silicium" en technologie VLSI. En profitant du parallélisme inhérent de l'algorithme (possibilité de mettre les calculs, voir l'architecture, en parallèle), un compromis entre la surface et le temps d'exécution est à choisir.

Le développement d'algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques souvent avec régularisation multiple exige une vision du problème solutionné dans le contexte de l'approche systémique et une utilisation de l'approche unifiée à la reconstitution de mesurandes pour:

- identifier l'information *a priori* sur le problème en question;
- adapter l'algorithme à l'utilisation de cette information;
- introduire cette information dans l'algorithme;

Pour l'étude des algorithmes développés, des données synthétiques et expérimentales provenant des cas réels d'analyses environnementales spectrométriques ainsi que des problèmes d'analyse de la disparité des images, sont utilisées.

1.4 Structure de la thèse

Le chapitre 2 donne une formulation générale du problème de reconstitution de mesurandes dynamiques. Pour formuler ce problème, nous introduisons le modèle général d'une mesure. Ce dernier peut être décomposé en deux opérations successives: la conversion, où le mesurande est transformé en signal électrique, et la reconstitution qui permettra d'extraire le mesurande original à partir de sa mesure. Un modèle mathématique de la conversion ou de la reconstitution peut être identifié lors de l'étalonnage du système de mesure en utilisant des données de références. La nature du comportement du modèle de la conversion (statique ou dynamique) et le modèle du mesurande nous permettra de classifier et caractériser le problème de reconstitution. Dans le chapitre 2, nous montrons également des exemples de reconstitution de mesurandes dynamiques rencontrés dans les différents domaines de la physique appliquée. Nous mettons l'accent sur deux applications différentes qui seront traitées dans cette thèse: une application en spectrométrie et une application en traitement d'images en télécommunication.

L'analyse du problème de reconstitution de mesurandes dynamiques est abordée au chapitre 3. Nous y définissons d'abord le modèle mathématique des données de mesure nécessaire pour reconstituer le mesurande. Nous étudions aussi les différentes sources d'erreurs capable d'influencer la résolution de ce problème. Ensuite, nous montrons que le problème de reconstitution est mal posé au sens de Hadamard et que les difficultés liées à son solution sont celles des équations intégrales de première espèce. Pour surmonter ces difficultés, il faut régulariser le problème en exploitant les informations a priori que nous possédons sur le mesurande et sur les erreurs de mesure. La régularisation permettra d'obtenir une solution numériquement stable et acceptable de point de vue technique. En fait, toute méthode de reconstitution qui "marche" effectue d'une manière ou d'une autre une régularisation!

Une revue des méthodes et algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques est présentée au chapitre 4. Nous caractérisons six classes de méthodes de reconstitution correspondant à six mécanismes de régularisation. Dans le but de com-

parer les performances des algorithmes proposés aux chapitres 5 et 6, nous décrivons certains algorithmes de référence utilisés dans les deux domaines d'application traités dans cette thèse. Nous présentons également la méthodologie utilisée pour évaluer les algorithmes de reconstitution de mesurandes.

Dans le chapitre 5 nous proposons deux nouveaux algorithmes pour la correction de la résolution des analyses spectrométriques. Ils sont basés sur une régularisation multiple qui associe des contraintes physiques caractérisant la classe de mesurandes à reconstituer. Le premier algorithme utilise une méthode variationnelle pour la reconstitution et le deuxième utilise une méthode récursive basée sur le filtre de Kalman. Les résultats de l'évaluation de ces algorithmes obtenus avec des données synthétiques et expérimentales, ainsi que la comparaison de leurs performances avec les algorithmes de référence, terminent le chapitre.

Le chapitre 6 traite la deuxième application qui concerne le domaine d'imagerie. L'objectif consiste à chercher la mise en correspondance d'une paire d'images stéréo et ainsi estimer la disparité entre eux. Nous proposons deux algorithmes de reconstitution. Le premier algorithme utilise une procédure de déconvolution combinée avec la technique de la somme des différences aux carré (SSD); le deuxième applique directement la technique d'adaptation SSD. Les résultats de l'évaluation de ces algorithmes obtenus avec des données synthétiques et expérimentales ainsi que la comparaison de leurs performances avec les algorithmes de référence sont présentés aussi.

Au chapitre 7 nous présentons de façon synthétique notre contribution algorithmique et méthodologique à la qualité d'un outil métrologique par l'application des méthodes avancées de traitement de signaux dans la reconstitution de mesurandes dynamiques. Nous parlons des nouvelles perspectives qui s'ouvrent à ce travail de recherche.

Chapitre 2

FORMULATION DU PROBLÈME DE RECONSTITUTION DE MESURANDES DYNAMIQUES

2.1 Notions de base

Chaque signal de mesure peut être caractérisé par sa nature physique et le modèle mathématique adopté pour l'analyse. Les signaux sont en général modélisés en utilisant des fonctions scalaires d'un variable scalaire modélisant le temps:

$$x : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{X}$$

où \mathbf{T} est l'ensemble des nombres réelles pour le temps (support du signal) et \mathbf{X} est l'ensemble des nombres réelles pour le signal. Ainsi, chaque signal de mesure peut être caractérisé par:

- sa nature physique;
- le type de l'ensemble \mathbf{X} ;
- le type de l'ensemble \mathbf{T} ;
- le type de la transformation x ;

- la façon du codage d'information.

En conséquence, et en tenant compte des notions introduites dans le paragraphe “Problématique”:

- La mesure peut être considérée comme une séquence d'opérations élémentaires consistant en la transformation d'une ou plusieurs caractéristiques du signal.
- Un système de mesure peut être donc considéré comme un ensemble de blocs fonctionnels, réalisant ces opérations élémentaires, organisés de façon à accomplir le traitement des signaux désiré.
- La conversion qui consiste en une série de transformations du signal reçu de l'objet de mesure en un signal électrique, de préférence numérique (conversion AA et AN). Un résultat brut de mesure contient l'information sur la grandeur mesurée mais il exige une reconstitution pour l'interprétation de cette information et pour sa présentation dans une forme plus utile comme un résultat final de mesure.
- La reconstitution qui consiste en une série de transformations du résultat de conversion (résultat brut de mesure) en résultat final de mesure (conversion NN). Dans des cas de mesure plus complexes, les méthodes numériques de la reconstitution sont utilisées par exemple pour l'amélioration de la qualité des données spectrométriques, la correction dynamique des capteurs, l'interprétation des données sismiques, l'égalisation des canaux de télécommunications, etc.

Compte tenu de ce qui précède, les blocs correspondants de chaque système de mesure peuvent être classés en deux groupes: le premier groupe appelé la **conversion** dont la réalisation est plutôt matérielle tandis que le second appelé **reconstitution** plutôt logicielle.

2.2 Modèle de mesure

La modélisation d'un système de mesure est relativement complexe car il contient des éléments (blocs fonctionnels) matériels et logiciels, électriques et non électriques, analogiques et numériques.

Pour entrer plus profondément dans la question de modélisation de mesure, nous pouvons considérer le modèle général plus détaillé d'un système de mesure présenté à la figure 2.1 [8].

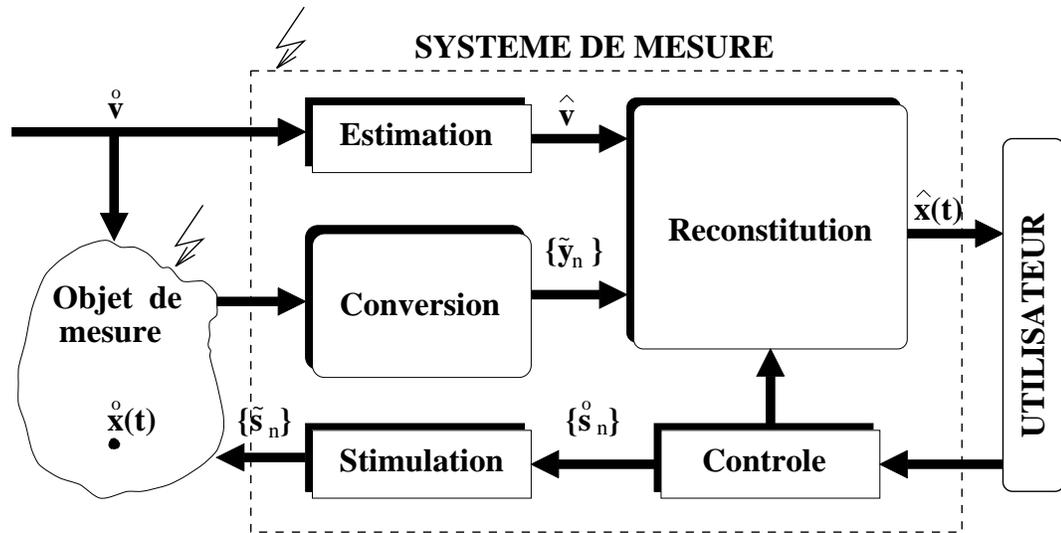


Figure 2.1: Modèle général d'un système de mesure

Dans ce modèle: $\mathbf{x}(t)$ est le mesurande, $\{\mathbf{y}_n\}$ est le vecteur des résultats crus de mesure, \mathbf{v} représente le vecteur des grandeurs d'influence et $\{\mathbf{s}_n\}$ est le signal stimulant l'objet de mesure. Dans tout ce qui suit le caractère gras représente un vecteur, le symbole avec “ \circ ” indique une valeur exacte, le symbole avec “ $\hat{}$ ” indique une valeur estimée et le symbole avec “ $\tilde{}$ ” désigne une valeur bruitée. En particulier

- $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(t)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ et $\{\overset{\circ}{\mathbf{s}}_n\}$ sont les valeurs exactes de $\mathbf{x}(t)$, \mathbf{v} et $\{\mathbf{s}_n\}$ respectivement;
- $\hat{\mathbf{x}}(t)$ et $\hat{\mathbf{v}}$ sont les valeurs estimées de $\mathbf{x}(t)$ et de \mathbf{v} respectivement;

- $\{\tilde{\mathbf{y}}_n\}$ et $\{\tilde{\mathbf{s}}_n\}$ sont les séquences des valeurs bruitées des vecteurs \mathbf{y}_n et \mathbf{s}_n respectivement.

En utilisant cette notation, la conversion dans le système de mesure électrique consiste en une série de transformations de signaux $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ reçus de l'objet de mesure (stimulé par $\{\tilde{\mathbf{s}}_n\}$) en des signaux électriques, standards, préférablement numériques qui représentent alors les résultats bruts de mesure $\{\tilde{\mathbf{y}}_n\}$. La reconstitution consiste donc en traitement de ces résultats bruts de mesure, en utilisant les valeurs estimées $\hat{\mathbf{v}}$ de $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ et les valeurs exactes de $\{\overset{\circ}{\mathbf{s}}_n\}$, afin d'obtenir des estimés $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ du mesurande; résultat final de mesure. En d'autres termes, la reconstitution d'un mesurande consiste en l'estimation d'un signal $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$, qui n'est pas mesurable directement, à partir des résultats partiels de mesure $\{\tilde{\mathbf{y}}_n\}$ liés avec $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ de façon causale. Pour effectuer la reconstitution, il est nécessaire de connaître les relations entre ses grandeurs, alors d'identifier le modèle mathématique du système de mesure, ou plus précisément du bloc de conversion :

$$\{\overset{\circ}{\mathbf{y}}_n\} = \mathcal{M} [\overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) ; \overset{\circ}{\mathbf{v}} ; \{\overset{\circ}{\mathbf{s}}_n\}] , \quad (2.1)$$

où $\{\overset{\circ}{\mathbf{y}}_n\}$ sont les valeurs exactes des résultats de mesure en l'absence des grandeurs parasites, \mathcal{M} est un opérateur dont son inversion ou pseudoinversion est la clé à la reconstitution de mesurande. Ce modèle est généralement décrit par un système d'équations algébriques, différentielles ou intégrales.

Le bloc de la reconstitution est caractérisé par un opérateur de reconstitution de mesurande :

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathcal{R} [\{\tilde{\mathbf{y}}_n\} ; \hat{\mathbf{v}} ; \{\overset{\circ}{\mathbf{s}}_n\}] , \quad (2.2)$$

généralement choisi comme l'inverse ou pseudoinverse du modèle de conversion (Eq. (2.1)). Cet opérateur peut être aussi déterminé directement lors de l'étalonnage du système de mesure.

2.3 Étalonnage d'un système de mesure et reconstitution d'un mesurande

L'étalonnage d'un système de mesure comprend l'ensemble des opérations qui permettent d'explicitier, sous forme graphique ou algébrique, l'opérateur \mathcal{M} défini par la relation (2.1) ou l'opérateur \mathcal{R} défini par la relation (2.2). Selon la nature du système de mesure (statique ou dynamique) nous distinguons deux catégories d'étalonnage/reconstitution :

- étalonnage/reconstitution statique où une valeur du résultat cru de mesure \mathbf{y}_n dépend uniquement en une valeur du mesurande $\mathbf{x}(\mathbf{t}_n)$ [11];
- étalonnage/reconstitution dynamique où le résultat cru de mesure \mathbf{y}_n dépend en un ensemble de valeurs du mesurande [12]

$$\{\mathbf{x}(\mathbf{t}) \mid \mathbf{t} \in [\mathbf{t}_n - \mathbf{T}_1, \mathbf{t}_n + \mathbf{T}_2]\}$$

Pour les deux catégories, l'étalonnage consiste à estimer les paramètres ou les fonctions qui décrivent l'opérateur \mathcal{M} ou \mathcal{R} en se basant sur les données de référence:

$$D^{ref} = \{ \tilde{\mathbf{x}}_n^{ref}, \tilde{\mathbf{v}}_n^{ref}, \tilde{\mathbf{y}}_n^{ref} \mid n = 1, 2, \dots \}, \quad (2.3)$$

sujet à des erreurs de mesure:

$$|\Delta[\tilde{\mathbf{x}}_n^{ref}]| \leq \overline{\Delta\mathbf{x}^{ref}}; \quad |\Delta[\tilde{\mathbf{v}}_n^{ref}]| \leq \overline{\Delta\mathbf{v}^{ref}}; \quad |\Delta[\tilde{\mathbf{y}}_n^{ref}]| \leq \overline{\Delta\mathbf{y}^{ref}}, \quad (2.4)$$

où $\overline{\Delta\mathbf{x}^{ref}}$, $\overline{\Delta\mathbf{v}^{ref}}$ et $\overline{\Delta\mathbf{y}^{ref}}$ sont les limites des erreurs absolues de \mathbf{x} , \mathbf{v} et \mathbf{y} respectivement. La qualité de l'étalonnage dépend essentiellement de la qualité des données utilisées pour l'étalonnage ainsi que de l'approximation ou paramétrisation de l'opérateur \mathcal{M} ou \mathcal{R} .

2.4 Classification des problèmes de reconstitution de mesurande

Le problème de reconstitution de mesurande est un cas spécial du problème de modélisation inverse. La résolution de ce problème n'est absolument pas triviale. La raison en est qu'il s'agit d'un problème dans la plupart des cas mal posé [9, 13]. Les difficultés de ce problème seront exposées dans le prochain chapitre, mais avant cela nous devons introduire les différents critères qui sont utilisés pour la classification des problèmes de reconstitution de mesurande:

- modèle mathématique du mesurande;
- modèle mathématique de l'opérateur \mathcal{M} ou \mathcal{R} ;
- nature physique du mesurande;
- domaines d'applications.

Les deux premiers critères sont d'une grande importance pour l'utilisateur lorsqu'il vient d'élaborer une méthode de reconstitution. En utilisant le premier critère, nous pouvons classifier encore les problèmes de reconstitution selon la structure des variables \mathbf{x} et \mathbf{t} du mesurande à savoir :

- \mathbf{x} est un scalaire ou un vecteur;
- \mathbf{x} est aléatoire ou déterministe;
- \mathbf{t} est vide, scalaire ou vectoriel;
- \mathbf{t} contient une variable modélisant le temps ou autres quantités physiques;

Pour le deuxième critère, le modèle mathématique de l'opérateur \mathcal{M} ou \mathcal{R} est généralement représenté par un système d'équations logiques, algébriques, différentielles ou intégrales. Comme l'opérateur \mathcal{M} modélise généralement une relation empirique causale entre le mesurande et les résultats crus de mesure, on peut ne pas avoir

une solution unique au problème inverse. Cette solution peut être instable vis-à-vis de faibles variations des résultats crus de mesure: aussi petite que soit la variation de ces résultats, elle risque d'amener des variations aussi grandes que l'on veut des résultats de reconstitution. Ainsi, les problèmes de reconstitution de mesurandes peuvent être classifiés selon le degré de cette sensibilité aux variations des résultats crus de mesure.

2.5 Caractérisation générale du problème de reconstitution de mesurandes

La complexité du problème de reconstitution dépend fortement de la nature du comportement de l'opérateur \mathcal{M} . En effet, nous pouvons distinguer deux classes principales de ses opérateurs:

- dynamiques, linéaires et non linéaires;
- statiques, linéaires et non linéaires.

Pour le cas des opérateurs statiques linéaires, la résolution du problème de reconstitution de mesurandes est très simple, vu que la dépendance entre le mesurande et le résultat de mesure est linéaire (le cas par exemple d'une résistance électrique pure où le courant i qui la traverse suit instantanément la tension v appliquée à ses bornes).

En ce qui a trait aux opérateurs dynamiques non linéaires, ils forment une vaste classe sans mode de présentation universelle et aucune théorie globale n'existe permettant, comme dans le cas linéaire, de déterminer simplement les relations liant les résultats crus de mesure au mesurande. Ils sont généralement représentés en série de fonctionnelles de Volterra [14], et dans ce cas la résolution du problème de reconstitution du mesurande s'avère une tâche très difficile. Dans de nombreux cas nous essayons de linéariser le système ou parfois utiliser la partie linéaire du modèle et ainsi nous pourrions résoudre le problème de reconstitution étant devenu linéaire.

Dans la suite du paragraphe, nous traitons le problème de reconstitution de mesurande scalaires spécifiquement pour le cas des opérateurs statiques non linéaires et des opérateurs dynamiques linéaires.

Le problème de reconstitution dans le cas statique non linéaire, avec une grandeur scalaire d'influence, repose sur l'utilisation de l'opérateur \mathcal{M} de la forme [8]:

$$\tilde{y} = G(x, v, \mathbf{p}) \quad \text{avec} \quad x \in \mathbf{X}, v \in \mathbf{V}, \quad (2.5)$$

où \mathbf{X}, \mathbf{V} sont des sous-espaces des nombres réels, G est une fonction connue réelle et monotone pour $(x,v) \in \mathbf{X} \times \mathbf{V}$, \mathbf{p} est le vecteur des paramètres qui décrivent l'opérateur \mathcal{M} . Ce dernier peut être estimé lors de l'étalonnage du système de mesure en se basant sur les données de référence D^{ref} . Le résultat de l'étalonnage peut être ensuite utilisé pour reconstituer le mesurande de la façon suivante :

$$\hat{x} = \arg_x \{ \tilde{y} = G(x, \hat{v}, \hat{\mathbf{p}}) \}. \quad (2.6)$$

La méthodologie de la résolution du problème de reconstitution de mesurandes statiques repose sur trois éléments de base :

- la méthode de paramétrisation du modèle direct \mathcal{M} ;
- la méthode d'estimation des paramètres \mathbf{p} ;
- la méthode de calcul de \hat{x} selon l'équation (2.6).

Le problème de reconstitution dans le cas dynamique linéaire, sans grandeurs d'influence, repose sur l'utilisation de l'opérateur \mathcal{M} de la forme [8]:

$$\{\tilde{y}_n\} = \left\{ \int_{\mathbf{T}} g(t_n, t, \mathbf{p}) x(t) dt \mid t_n \in \mathbf{T} \right\} \quad \text{pour } x(t) \in \mathbf{X}(\mathbf{T}), \quad (2.7)$$

où \mathbf{T} est un sous-espace des nombres réels, t_n et $t \in \mathbf{T}$ sont des variables réelles modélisant souvent le temps, $\mathbf{X}(\mathbf{T})$ est un espace des fonctions réelles de t et $g(t_n, t, \mathbf{p})$ est une fonction connue. Le vecteur des paramètres \mathbf{p} est estimé lors de l'étalonnage du système de mesure et le résultat est utilisé pour la reconstitution :

$$\hat{x} = \mathcal{R} \{ \tilde{y}_n \}; \hat{\mathbf{p}}. \quad (2.8)$$

Contrairement au cas statique non linéaire, le problème de reconstitution de mesurande pour le cas dynamique est souvent mal posé [10]. Les difficultés dans la résolution du problème proviennent du caractère régularisant de l'opérateur dynamique \mathcal{M} qui rend son inversion s'accompagne d'une amplification des effets des petites fluctuations irrégulières des résultats crus de mesure $\{\tilde{y}_n\}$. Cette instabilité fait que la solution obtenue s'avère être non unique et sujet à des erreurs très larges, alors elle est difficile à interpréter. En ce sens, la méthodologie de résolution de ce problème repose sur les prémisses suivantes [8]:

- le résultat final de mesure $\hat{x}(t)$ généré par \mathcal{R} doit appartenir à l'espace $\mathbf{X}(\mathbf{T})$;
- son image $\mathcal{M}[\hat{x}(t); \mathbf{p}]$ doit être proche des résultats de mesure $\{\tilde{y}_n\}$ mais pas nécessairement identique;
- optionnellement, $\hat{x}(t)$ doit satisfaire certains critères additionnels qui reflètent les informations *a priori* disponibles sur la classe des mesurandes.

Les deux dernières prémisses consistent à apporter une information supplémentaire sur la solution désirée afin de résoudre correctement le problème mal posé. En d'autres termes, elles introduisent des contraintes capables de restreindre l'ensemble des solutions acceptables et d'obtenir une solution unique et stable vis-à-vis des erreurs sur les résultats crus de mesure.

En résumé, la méthodologie de la reconstitution de mesurande dynamique dépend essentiellement de quatre éléments de base:

- la méthode de paramétrisation de l'opérateur \mathcal{M} ou \mathcal{R} ;
- la méthode d'estimation des paramètres \mathbf{p} ;
- la méthode de régularisation incorporé dans l'opérateur \mathcal{R} ;
- la méthode de calcul de $\hat{x}(t)$ selon l'équation (2.8).

Vu son comportement comme un problème inverse mal posé [10] et les difficultés qui résultent de la résolution de ce genre de problème, nous nous intéresserons, dans

cette thèse, uniquement au problème de la reconstitution de mesurandes dynamiques qui peuvent être résolus en utilisant des opérateurs \mathcal{M} linéaires et invariants par translation. En effet, ces opérateurs caractérisent la grande majorité des applications de reconstitution dans les divers domaines de la physique expérimentale et de la métrologie. Ses diverses applications feront l'objet du paragraphe suivante.

2.6 Exemples de reconstitution de mesurandes dynamiques

2.6.1 Revue générale

Dans la grande majorité des applications en métrologie, les mesures physiques sont effectuées à l'aide de systèmes de mesure qui peuvent être adéquatement modélisées par une équation de convolution de la forme:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

où $g(t)$ caractérise la réponse impulsionnelle du système de mesure. Le problème de reconstitution se ramène donc à résoudre cette équation par rapport au mesurande à partir des données de mesure $\{\tilde{y}_n\}$ qui représentent $y(t)$. Ce problème est bien conforme aux nombreuses situations pratiques dans les différents domaines de la technique de mesure et de commande. Dans ce paragraphe nous caractériserons brièvement quelques unes de ses applications.

Géophysique : Les méthodes de reconstitution sont utilisées pour l'interprétation des données sismiques. Dans cette application, une onde appelée ondelette sismique est émise dans le sol afin de détecter les réflexions se produisant sur les interfaces des couches géologiques. Les enregistrements ou traces sismiques sont formés d'une superposition bruitée de ces réflexions et peuvent être considérés comme le résultat de convolution (Eq. (2.9)) du signal source $x(t)$ par la réponse impulsionnelle du sol $g(t)$ nommée la fonction de réflectivité. La reconstitution consiste, par une estimation

de $x(t)$, à éliminer son effet sur la trace afin de restituer la fonction de réflectivité $g(t)$ [15, 16, 17, 18].

Instrumentation analytique : Les méthodes de reconstitution sont utilisées pour l'amélioration de la résolution des instruments tels que les spectromètres, chromatographes, etc. Dans le domaine de la spectrométrie, où on mesure l'intensité d'un rayonnement x en fonction de la longueur d'onde λ , les résultats crus de mesure $\tilde{y}(\lambda)$ sont affectés par des erreurs systématiques causées par le spectromètre qui engendrent le recouvrement des raies voisines du spectre. En résolvant l'équation de convolution (Eq. (2.9)), nous pouvons améliorer la résolution du spectromètre [19, 20, 21, 22]. Cette application sera traitée en détail au paragraphe 2.6.2 et dans le chapitre 5 de cette thèse.

Télécommunication : Dans le domaine de télécommunications, le problème de reconstitution est inhérent à la restauration des images en vue de compenser les dégradations subies lors de leur transmission ou mémorisation [23, 24, 25]. Les méthodes de reconstitution sont utilisées aussi pour l'égalisation des canaux de télécommunication afin de compenser les distorsions du signal subies lors de sa transmission à cause du bruit (interférence) [26]. Le problème d'estimation de disparité entre deux images peut être aussi formulé comme un problème de déconvolution; nous analyserons cette dernière application en détail au paragraphe 2.6.3 et dans le chapitre 6 de cette thèse.

Radioastronomie ou imagerie radar : Le modèle de mesure est décrit par l'équation (2.9) formulée à 2-D. En synthèse d'ouverture en radioastronomie, les résultats crus de mesure représentent la mesure de la corrélation entre les signaux recueillis par deux antennes, par contre en imagerie radar ils représentent la transformée de Fourier du signal d'écho. Le signal à reconstituer est la brillance du ciel dans le cas du radioastronomie, et la variation de l'indice de réfraction de l'objet (cible) par rapport à son environnement dans le cas de l'imagerie radar [27].

Métrologie dynamique : Les méthodes de reconstitution sont utilisées pour la correction dynamique des transducteurs [28], pour la mesure des phénomènes transitoires de courte durée tel que la mesure d'onde de choc en très haute tension [29].

Biomédecine : Les méthodes de reconstitution sont utilisées pour le diagnostic médical basé sur les techniques de tomographie [30, 31].

2.6.2 Reconstitution en spectrométrie

Afin d'analyser les constituants d'une substance, on utilise un spectromètre. Les résultats crus de mesure, $\tilde{y}(\lambda)$, peuvent être adéquatement modélisés par une équation de convolution [19]:

$$\tilde{y}(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(\lambda - \lambda') x(\lambda') d\lambda' + \eta(\lambda) \quad (2.10)$$

où λ est la longueur d'onde, $x(\lambda)$ est le spectre d'absorption à mesurer, $g(\lambda)$ est la fonction d'appareil du spectromètre (réponse impulsionnelle) et $\eta(\lambda)$ est le bruit de mesure.

Du fait que la résolution du spectromètre n'est pas en général infini et, donc sa réponse $g(\lambda)$ ne peut pas être approximée par une impulsion de Dirac, les résultats de mesure $\tilde{y}(\lambda)$ ne représentent plus fidèlement le spectre réel que l'on désire atteindre et dans plusieurs cas ne donnent aucune spécification exacte des constituants de $x(\lambda)$. En effet, à cause de l'intervention des phénomènes de diffraction et d'autres causes éventuelles, telles que les aberrations optiques par exemple, les radiations voisines du spectre se superposent et provoquent le recouvrement des raies. De plus, les radiations de faible intensité risquent d'être aussi masquées par celles de forte intensité. Il faudra donc restaurer le spectre d'entrée $x(\lambda)$ à partir des résultats de mesure $\tilde{y}(\lambda)$. L'opération de reconstitution consiste dans ce cas à estimer le spectre d'entrée $x(\lambda)$ et ainsi pouvoir séparer les raies du spectre permettant par la suite l'amélioration de la résolution du spectromètre.

Pour mettre en évidence ce problème, la figure 2.2 représente les résultats

d'une analyse du spectre de la lumière synthétisée par deux lasers, effectuée avec le spectromètre ANRITSU MV02 Serie pour différentes résolutions $r = 0.1 \text{ nm}$, 1 nm , 2 nm , 5 nm . En comparant le spectre de référence (nous avons pris celui de $r = 0.1 \text{ nm}$), nous remarquons que les spectres obtenus pour $r = 1,2$ et 5 nm ne peuvent d'aucune façon donner une interprétation exacte des constituants du spectre qui peuvent être identifiés correctement en utilisant les résultats obtenus pour $r = 0.1 \text{ nm}$.

Pour réaliser l'opération de reconstitution du spectre réel, il faut tout d'abord identifier la réponse impulsionnelle du spectromètre $g(\lambda)$ et cela durant l'étalonnage du système en utilisant des données de référence. Du fait de la symétrie des rôles de $g(\lambda)$ et de $x(\lambda)$ dans une convolution, l'opération de reconstitution et celle de l'étalonnage sont équivalentes. Ainsi, les méthodes de reconstitution sont directement transposables à l'étalonnage. En pratique nous pouvons agir avec plus de souplesse dans ce cas car nous disposons d'une famille de couples entrée-sortie.

Une fois la réponse de l'appareil est déterminé nous pouvons procéder à la reconstitution du spectre. Il est clair que cette opération nécessite un traitement numérique des données qui est parfois fort complexe. Une reconstitution réussie résulte ainsi d'un équilibre entre les exigences d'un système de mesure (exactitude et vitesse) et les possibilités offertes par les moyens de calcul. Donc, la qualité de la mise en oeuvre d'un algorithme de reconstitution se mesure à l'aide des critères suivants : exactitude, temps de calcul, espace de mémoire et quantité de matériel.

2.6.3 Reconstitution en télécommunication

Dans ce domaine, les méthodes de reconstitution sont utilisées pour la restauration des images dégradées. En effet, la qualité d'une image peut être dégradée lorsque celle-ci change de support (reproduction, transmission, mémorisation, etc.) ou bien à cause d'un mauvais réglage de prise de vue. L'analyse de ces images dégradées montre que les dégradations les plus courantes peuvent être modélisées par une équation intégrale

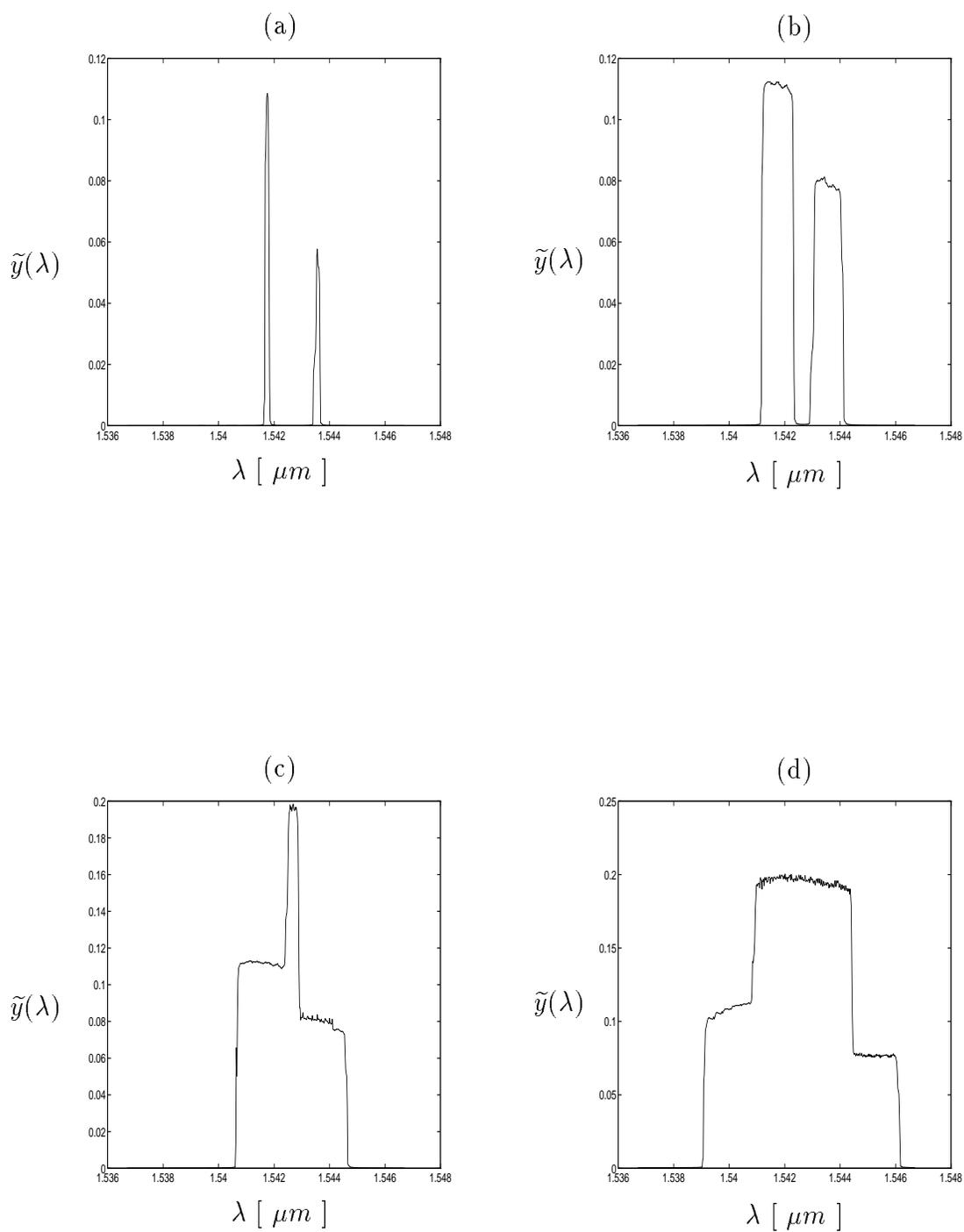


Figure 2.2: Spectre de la lumière synthétisée par deux lasers pour différentes résolutions r du spectromètre ANRITSU MV02 Serie (a) $r = 0.1 \text{ nm}$ (b) $r = 1 \text{ nm}$ (c) $r = 2 \text{ nm}$ (d) $r = 5 \text{ nm}$

de Fredholm de première espèce [23]:

$$\tilde{y}(t, z) = \int \int_D g(t - \tau, z - \nu) x(\tau, \nu) d\tau d\nu + \eta(t, z) \quad (2.11)$$

où (t, z) représente les axes du plan de l'image avec t l'axe horizontale et z l'axe verticale, $\tilde{y}(t, z)$ est l'image observée, $x(t, z)$ est l'image recherchée, $g(t, z)$ est la réponse impulsionnelle du système imagerie et D désigne le support de l'image.

En résolvant cette équation pour reconstituer $x(i, j)$, nous pouvons améliorer la qualité de l'image et ainsi obtenir des détails qui n'étaient pas accessibles avec l'image dégradée $\tilde{y}(i, j)$. La littérature qui traite ce problème est riche de méthodes et d'approches de reconstitution qui ont été élaborées pour restaurer les images [24].

Une autre application intéressante et liée aux problèmes d'imagerie, est l'analyse de la disparité des images [32, 33, 34]. La disparité entre deux images peut être définie comme l'absence d'accord ou d'égalité entre les deux images. Les différences entre les deux images peuvent être le résultat du mouvement de la caméra, le déplacement de deux caméras ou le mouvement des objets dans la scène. Nous rencontrons ce problème surtout en stéréovision où nous devons faire la mise en correspondance des images produites par deux caméras qui observent la même scène afin de déterminer la disparité. L'interprétation de la disparité peut nous donner certaines spécifications à propos de la scène, telle que la profondeur des objets qui nous permet de reconstruire la scène en 3-D à partir de la projection en 2-D. La mesure de la disparité peut être utile aussi pour la compression des données des images stéréoscopiques.

En stéréovision, quand deux caméras observent un objet, il existe plusieurs éléments de cet objet qui sont visibles dans les deux images stéréoscopiques, $I_g(t, z)$ et $I_d(t, z)$ (images gauche et droite), produites. Ainsi, un point dans une image peut donc être possiblement associé à un point dans l'autre image en raison du fait qu'ils correspondent aux mêmes point physique de l'objet. La différence entre les coordonnées des images de points qui se correspondent est dite disparité. La disparité est un vecteur $x(t, z)$ qui permet d'exprimer le fait que le point visible sur l'image gauche I_g au point (t, z) se trouve au point $(t + x_t(t, z), z + x_z(t, z))$ dans l'image droite I_d . Si on suppose que le système de prise de vues possède une géométrie épipolaire, la

disparité peut être alors exprimée par un scalaire représentant uniquement le déplacement horizontal $x_t(t, z)$ (le déplacement vertical $x_z(t, z)$ sera négligé). Dans ce cas, le problème se réduit à la détermination de $x(t, z)$ telles que $I_g(t, z)$ et $I_d(t + x(t, z), z)$ soient très proche l'une de l'autre. Le modèle mathématique sera ainsi:

$$I_g(t, z) = I_d(t + x(t, z), z) + \eta(t, z) \quad (2.12)$$

où $x(t, z)$ est un scalaire et $\eta(t, z)$ représente le bruit qui entache les mesures. Dans cette représentation, chaque point de l'image (gauche et droite) est représenté par l'intensité de la lumière (luminance) en ce point. Sous l'hypothèse que la variation de la fonction de disparité est faible, nous pouvons écrire (2.12) sous la forme:

$$I_g(t, z) = I_d(t, z) * \delta(t + x(t, z), z) + \eta(t, z) \quad (2.13)$$

où $\delta(., .)$ représente la fonction de Dirac bidimensionnelle. De cette manière, le problème d'évaluation de la disparité, qui est déjà un problème inverse et mal posé [32], peut être formulé comme un problème de reconstitution qui nécessite la déconvolution.

Chapitre 3

ANALYSE DU PROBLÈME DE RECONSTITUTION DE MESURANDES DYNAMIQUES

3.1 Modélisation mathématique des données de mesure

L'analyse des systèmes physiques en général, consiste à les décrire par des modèles mathématiques permettant de prévoir leur comportement. Ainsi, la première étape de l'analyse du problème de reconstitution sera la modélisation mathématique des données de mesure $\{\tilde{y}_n\}$. Ces dernières sont généralement discrètes, en nombre fini et entachées d'erreurs de mesure ou bruits. Nous pouvons les représenter sous la forme d'un vecteur:

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_0 \mid \tilde{y}_1 \mid \dots \mid \tilde{y}_{N-1}]^T = \mathring{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\eta} \quad (3.1)$$

où

$$\mathring{\mathbf{y}} = [\mathring{y}_0 \mid \mathring{y}_1 \mid \dots \mid \mathring{y}_{N-1}]^T \quad (3.2)$$

et $\boldsymbol{\eta}$ est le vecteur qui représente les erreurs (ou bruits) additives:

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_0 \mid \eta_1 \mid \dots \mid \eta_{N-1}]^T \quad (3.3)$$

Les composantes \tilde{y}_n , $n=0,1,\dots,N-1$, sont généralement modélisées par une équation

tion intégrale de Fredholm de première espèce de la forme :

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}(t_n) = \int_{\mathbf{T}} g(t_n, \tau) x(\tau) d\tau + \eta_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

où $g(t, \tau)$ représente le noyau de la transformation intégrale qui lie les résultats crus de mesure \tilde{y} et le mesurande $x(t)$; \mathbf{T} désigne le support du mesurande. Nous considérons dans cette formulation que les signaux $y(t)$, $x(t)$ et $g(t)$ sont à énergie finie dans leurs domaines de définition. Plus spécifiquement, ces signaux appartiennent à l'espace Hilbert des fonctions réelles du temps $\mathbf{L}^2(R)$ de carré intégrable:

$$x(t) \in \mathbf{L}^2(R) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3.5)$$

Dans la majorité des cas nous supposons que le modèle est invariant par translation et donc le noyau $g(t, \tau)$ ne dépend que de la différence $(t - \tau)$. L'équation (3.4) se ramène alors à une équation de convolution :

$$\tilde{y}_n = \int_{\mathbf{T}} g(t_n - \tau) x(\tau) d\tau + \eta_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.6)$$

et $g(t)$ caractérise maintenant la réponse impulsionnelle du système de mesure, qui est censée être connue. Si ce dernier peut être décrit par une combinaison linéaire de fonctions $\psi(t) e^{-\alpha t}$, où $\psi(t)$ est un polynôme algébrique, nous pouvons alors décrire l'équation de convolution par une équation différentielle ordinaire. De plus, si nous nous restreignons au cas où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions tempérées ayant une transformée de Fourier, nous pouvons représenter l'équation de convolution (3.6) dans le domaine des transformées de Fourier ou dans le domaine des transformées de Laplace.

3.2 Sources d'erreurs de reconstitution

Nous distinguons deux catégories de source d'erreurs qui peuvent influencer la résolution et l'exactitude de l'opération de reconstitution de mesurande:

- erreurs causées par les erreurs qui entachent les données de mesure,
- erreurs générées par le traitement numérique de l'opération de reconstitution (discrétisation, quantification et régularisation).

La première catégorie d'erreurs est la cause profonde des difficultés du problème de reconstitution. Il constitue le plus souvent, la limitation drastique de beaucoup de méthodes de reconstitution proposées dans la littérature [35]. En effet, le vecteur $\boldsymbol{\eta}$ qui modélise les erreurs est généralement inconnu, mais il est souvent supposé qu'il appartient à un ensemble borné \mathbf{H}_η dont certaines caractéristiques sont disponibles, en particulier sa dimension:

$$\Delta_Y = \sup\{ \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_Y \mid \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbf{H}_\eta \}, \quad (3.7)$$

où $\|\cdot\|_Y$ est une norme définie dans l'espace des vecteurs \mathbf{y} . Dans ce cas le vecteur des résultats crus de mesure exacte $\mathring{\mathbf{y}}$ doit être un élément de l'ensemble borné des vecteurs \mathbf{H}_Y :

$$\mathbf{H}_Y = \{ \mathring{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_\eta \}. \quad (3.8)$$

En conséquence, la solution au problème de reconstitution $\mathring{\mathbf{x}}$ doit être recherchée dans l'ensemble des solutions admissibles \mathbf{H}_X :

$$\mathbf{H}_X = \{ \mathbf{x} \mid \mathcal{M}[\mathbf{x}] \in \mathbf{H}_Y \}. \quad (3.9)$$

Si nous acceptons un élément $\hat{\mathbf{x}}$ de cet ensemble comme résultat final de mesure, nous accepterons donc la limite supérieure de l'erreur de reconstitution:

$$\Delta_X = \sup\{ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_X \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{H}_X \}. \quad (3.10)$$

À première vue, la proximité de deux éléments \mathbf{y}_1 et \mathbf{y}_2 de \mathbf{H}_Y (évaluée par la norme) semble entraîner naturellement la proximité des inverses correspondants \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Malheureusement, ce n'est pas le cas; l'expérience montre que dans la majorité des cas de reconstitution, la petitesse de Δ_Y ne garantit pas celle de Δ_X et ceci reste vrai quel que soit le nombre de mesures effectuées, même s'il est infini. En fait, le rapport Δ_X/Δ_Y prend des valeurs très grandes (même infinies) entraînant par la suite l'instabilité des solutions de la reconstitution. Cette instabilité fait que la solution approximative au problème de reconstitution (problème inverse) s'avère être non unique (dans les limites de l'exactitude que l'on s'est fixées) et qu'elle est souvent difficile à interpréter. Ce manque d'unicité de la solution donne au problème de

reconstitution le caractère mal posé (un problème mal posé ne signifie nullement que le problème est mal formulé). Ce point sera vu en détail dans le prochain paragraphe.

De cela, nous comprenons que la reconstitution, sans avoir pris en considération les erreurs sur les données, risque d'engendrer des amplifications indésirables de ses erreurs dans la solution. En effet, pour des raisons de simplicité, nous serons fréquemment amené lors de la modélisation du problème de reconstitution, à supposer que les erreurs peuvent être modélisées par une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire non corrélé.

Quant à la deuxième catégorie d'erreurs, elle caractérise les erreurs de quadrature et de régularisation dues à la discrétisation du modèle de données de mesure (approximation d'une intégrale par une somme finie) et les erreurs de quantification dues à la représentation des données par un nombre de bit fini, nécessaire à un traitement numérique de l'opération de reconstitution.

3.3 Mal-conditionnement numérique du problème de reconstitution

La résolution du problème de reconstitution de mesurande repose essentiellement sur la résolution numérique de l'équation intégrale de convolution (3.6). C'est un problème mal posé au sens de Hadamard [9], parcequ'il ne satisfait pas au moins à une parmi les trois exigences suivantes:

- que la solution existe;
- que la solution soit définie de façon unique;
- que la solution soit stable.

En supposant que $x(t)$, $y(t)$ et $g(t)$ possèdent des transformées de Fourier, nous pouvons reformuler notre problème (3.6) dans le domaine fréquentiel:

$$\tilde{\mathcal{Y}}(j\omega) = \mathcal{X}(j\omega).\mathcal{G}(j\omega) + \mathcal{N}(j\omega), \quad (3.11)$$

où $\mathcal{X}(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $\tilde{\mathcal{Y}}(j\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$, $\mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, $\mathcal{N}(j\omega) = \mathcal{F}\{\eta(t)\}$.
 Pour qu'une solution à l'équation (3.11) existe [35, 36]:

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{\tilde{\mathcal{Y}}(j\omega)}{\mathcal{G}(j\omega)} - \frac{\mathcal{N}(j\omega)}{\mathcal{G}(j\omega)} \quad (3.12)$$

il faut que $1/\mathcal{G}(j\omega)$ existe et soit une fonction tempérée. De plus, $\mathcal{G}(j\omega)$ doit être une fonction qui ne s'annule pour aucune valeur de fréquence ω et qui ne tende pas vers zéro à l'infini plus vite qu'une puissance de $1/\omega$, pour que nous puissions définir une solution unique. Dans la pratique ces conditions ne sont jamais satisfaites; on peut rencontrer dans beaucoup de cas que $\mathcal{G}(j\omega)$ est une fonction qui, théoriquement, s'annule au delà d'une fréquence de coupure ω_c et qu'elle tende vers zéro quand ω croit. Alors, $\mathcal{G}(j\omega)$ présentera des passages par zéro et la division $1/\mathcal{G}(j\omega)$ est pratiquement impossible.

D'autre part, le rapport

$$\frac{\mathcal{N}(j\omega)}{\mathcal{G}(j\omega)}$$

peut ne pas admettre de transformée de Fourier inverse à cause de l'influence des hautes fréquences ω de la réalisation du processus aléatoire $\mathcal{N}(j\omega)$. Même si elle admet une transformation inverse, l'écart de cette fonction du zéro peut être aussi grande que l'on veut, et nous tombons dans la sursensibilité vis-à-vis de faibles variations des données de mesure.

De toutes ces considérations, il ressort que le problème de reconstitution défini à temps continu ne respecte pas les trois exigences de Hadamard; alors c'est un problème mal posé.

La résolution numérique d'un tel problème exige une discrétisation du modèle des données de mesure (3.6). En utilisant une méthode de quadrature appropriée, l'équation (3.6) peut être transformée en un système d'équations algébriques linéaires de la forme :

$$\tilde{y}_n = \sum_{i=0}^M g(n-i) x(i) + \eta_n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.13)$$

ou bien sous la forme matricielle:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \quad (3.14)$$

où \mathbf{x} est le vecteur des valeurs du mesurande à reconstituer de dimension M , $\tilde{\mathbf{y}}$ est le vecteur des données de mesure de dimension N , \mathbf{G} est une matrice de dimension $N \times M$ qui dépend uniquement de la réponse impulsionnelle, et $\boldsymbol{\eta}$ est le vecteur des erreurs de données. La matrice \mathbf{G} est une matrice particulière dite de “Toeplitz” qui est entièrement définie par sa première ligne et sa première colonne.

La solution la plus évidente pour retrouver \mathbf{x} consisterait à choisir le pas de discrétisation afin que la matrice \mathbf{G} soit carrée, c’est-à-dire qu’il y ait au moins autant de données y_n que d’inconnues x_m , et à estimer la solution par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{y} \quad (3.15)$$

En fait, l’inverse de la matrice \mathbf{G} peut ne pas exister, ou peut être entaché par les erreurs très larges dues à l’amplification des plus faibles erreurs de \mathbf{G} . Quand $N > M$, une solution possible consiste à calculer la pseudoinverse à partir de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice \mathbf{G} . Mais, cette solution conduit aussi à une amplification des erreurs des plus faibles valeurs singulières de \mathbf{G} [37].

Mais en général $N > M$ (plus de données que d’inconnues), et même si \mathbf{G} n’est pas une matrice carrée, nous pouvons chercher une solution au sens des moindres carrés [37]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{J[\mathbf{x}] = (\mathbf{y} - \mathbf{G} \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{G} \mathbf{x})\} \quad (3.16)$$

qui minimise la somme des carrés des erreurs résiduelles. Si la matrice $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ est inversible, cette solution est donnée formellement par:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{y} \quad (3.17)$$

Même dans ce cas, l’inversion directe conduit aux mêmes phénomènes que précédemment. Ces difficultés d’inversion proviennent du caractère mal-conditionné des matrices \mathbf{G} et $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$. La solution inverse généralisée ou la solution au sens des

moindres carrés de norme minimale ne permettent d’assurer que la condition de l’unicité de la solution quand elle existe, mais le problème de la stabilité numérique de la solution vis-à-vis des erreurs de données reste entier. Ainsi nous retrouvons dans le problème de reconstitution discrétisé les mêmes difficultés évoquées pour la reconstitution dans le cas de modèles à temps continu (en ce qui concerne l’existence, l’unicité et la stabilité de la solution). Nous en déduisons que ce problème de reconstitution est numériquement mal-conditionné.

Le problème se résume ainsi à la recherche d’une “solution” unique, qui soit une approximation physiquement acceptable et suffisamment stable du point de vue calcul. Les propriétés de ces solutions acceptables ne sont pas généralement contenues dans l’équation de départ et le problème est d’apporter une information supplémentaire sur la solution désirée. Cette information peut nous être donnée soit sous une forme déterministe (limitation de support, positivité, etc ...), soit sous une forme stochastique (loi de probabilité ou des contraintes sur cette loi).

3.4 Régularisation du problème de reconstitution

Une manière de transformer un problème mal posé en un problème bien posé consiste à le régulariser. On désigne par “régularisation” d’un problème mal posé les différentes approches qui permettent de circonvenir le manque de dépendance continue de la solution vis-à-vis des données (et aussi d’apporter l’existence et l’unicité, si nécessaire). En gros, la régularisation consiste à remplacer un problème mal posé par un problème bien posé dont les solutions sont des approximations du problème mal posé. La régularisation signifie les idées suivantes [37, 38, 39, 40] :

- changement de la notion même de la solution en introduisant les solutions approchées, les quasi-solutions, etc ... ;
- changement d’espaces et de topologie dans la formulation du problème (le même problème mal posé peut s’avérer bien posé dans d’autres espaces métriques);

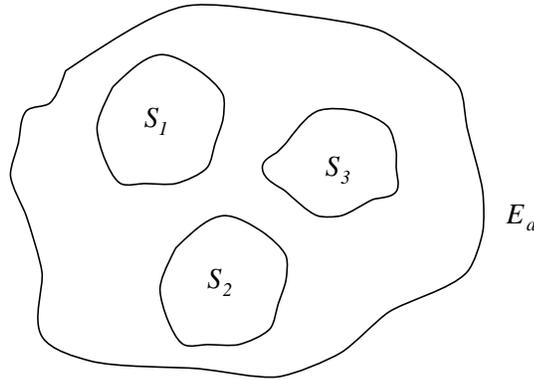


Figure 3.1: Espace des solutions admissibles

- imposition directe des contraintes sur l'ensemble des solutions;
- introduction d'opérateurs régularisants dans le critère d'optimisation de la solution;
- extension stochastique d'un problème initialement déterministe.

Chaque méthode de régularisation peut être interprétée comme une méthode de construction de l'ensemble des solutions admissibles.

Considérons la figure 3.1 pour mettre en évidence l'idée de la régularisation. L'espace des solutions admissibles du problème de reconstitution est dénoté par E_a , les S_i sont des sous ensembles de E_a qui ont des propriétés bien particulières (fonctions positives, fonctions à énergie minimal, etc.). Partant du fait que la résolution (au sens habituel (§3.3) du problème ne conduit pas à une solution unique, mais plutôt à une classe de solutions possibles, il est extrêmement rare que l'expérimentateur puisse choisir parmi ces solutions. Par contre, s'il dispose d'informations supplémentaires (de caractère qualitatif ou quantitatif), il pourra trouver dans E_a un sous ensemble S_i et forcer la solution à appartenir à S_i . Ces informations supplémentaires sont contenues dans l'opérateur régularisant [37, 41]. De cette manière, il réduit la dimension de l'espace des solutions admissibles et donne au problème le caractère bien posé.

Les contraintes utilisées dans la régularisation peuvent être divisées en deux groupes. Le premier contient les contraintes spécifiques à l'application en étude qui sont déterminées à partir des informations *a priori* sur la classe des mesurandes à reconstituer. Citons, à titre d'exemple, le caractère positif du mesurande ($x(t) \geq 0$ pour $t \in T$) un cas fréquent en spectrométrie, le support limité ($x(t) = 0$ en dehors de T).

Le deuxième groupe contient les contraintes qui permettent de restreindre l'ensemble des solutions admissibles en exploitant les informations *a priori* sur les propriétés des mesurandes à reconstituer \mathbf{x} , du bruit $\boldsymbol{\eta}$ ou le modèle de données. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, la discrétisation du modèle de données, la paramétrisation du mesurande ou la minimisation d'une fonctionnelle du mesurande caractérisant la qualité de reconstitution, utilisation d'une approche itérative pour trouver la solution. Nous nous baserons sur ce groupe de contraintes pour la classification des méthodes de reconstitution proposées dans la littérature (voir chapitre 4 §4.1). Compte tenu de ces informations *a priori*, l'expérimentateur souhaite restreindre la classe des solutions possibles en vue d'obtenir une classe de solutions étant physiquement acceptables et stables.

En conclusion, la régularisation d'un problème mal posé joue un rôle important dans l'obtention d'une solution acceptable. En plus, le mécanisme de régularisation permet d'unifier les principes des méthodes de reconstitution variées proposées dans la littérature. En effet, toutes les méthodes de régularisation sont basées sur la notion fondamentale d'opérateurs régularisants [10]. La recherche des solutions acceptables et stables se réduit ainsi à construire les opérateurs régularisants fonction d'un paramètre (dit paramètre de régularisation) qui est défini d'après les informations *a priori* sur le problème. Les méthodes de reconstitution, utilisant le mécanisme de régularisation, sont donc des méthodes de construction d'opérateurs régularisants. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'il y a des méthodes de construction qui sont fondées sur un principe variationnel (méthodes variationnelles), d'autres sur un principe itératif (méthodes itératives), etc.

Chapitre 4

MÉTHODES ET ALGORITHMES DE RECONSTITUTION DE MESURANDES DYNAMIQUES

La résolution effective du problème de reconstitution de mesurande est certes numérique. Il faudra donc projeter le problème initial de dimension infinie sur un espace de dimension finie pour construire une méthode de solution numérique. Ceci entraîne deux possibilités [37, 41]:

1. nous pouvons régulariser le problème dans un espace fonctionnel (tel que l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2(R)$) et ensuite appliquer des méthodes numériques d'approximation de la solution;
2. nous pouvons tout d'abord discrétiser ou approcher le problème mal posé par un problème de dimensions finies (décompositions tronquées en valeurs singulières, développements en série tronqués, etc.) et ensuite régulariser le problème discret.

Cette alternative a donné naissance à plusieurs méthodes de reconstitution utilisant le mécanisme de régularisation. Certes, une bonne méthode reposera essentiellement sur l'exploitation judicieuse de l'information *a priori* sur le problème de reconstitution en étude.

4.1 Classification et caractérisation générale

Dans ce paragraphe, nous ne tenterons pas une revue exhaustive des différentes méthodes de reconstitution proposées dans la littérature, mais nous caractériserons brièvement les méthodes les plus répandues, en utilisant le mécanisme de régularisation comme critère de leur classification [38]. Nous trouverons par ailleurs dans [37] des études assez complètes des différentes méthodes.

- **Méthodes directes** : elles consistent en la solution directe des équations algébriques résultant de la discrétisation du modèle de données (Eq. (3.14)) [35]. La méthode de discrétisation du modèle de données dépend du type du modèle : équation intégrale ou équation différentielle. L'ensemble des solutions admissibles est contraint à ceux des signaux continus qui peuvent être représentés exactement par les échantillons discrets obtenus comme résultats de reconstitution. Notons ici l'importance du choix du pas d'échantillonnage. En effet, il joue le rôle de paramètre de régularisation; sa valeur peut être choisie de façon à minimiser l'erreur totale de reconstitution. Le choix de ce paramètre implique un compromis entre la stabilité numérique et l'exactitude de la solution. En effet, lorsqu'on diminue le pas d'échantillonnage on diminue l'erreur de discrétisation, mais dans ce cas les valeurs propres les plus faibles de la matrice \mathbf{G} (§ 3.3) tendent vers zéro entraînant par la suite la dégradation du conditionnement de la matrice [42]. Nous comprenons donc, que plus l'erreur de discrétisation est faible, plus la solution directe est sujette à caution. Nous retrouvons dans cette classe de méthodes les algorithmes d'inversion généralisée ou pseudoinverse [37].

- **Méthodes variationnelles** : elles consistent à contraindre l'ensemble des solutions admissibles à celles qui minimisent (ou maximisent) un critère, noté $J[\mathbf{x}]$, définissant la qualité de la reconstitution:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{J[\mathbf{x}]\} . \quad (4.1)$$

L'énergie de l'erreur résiduelle $\tilde{\mathbf{y}} - \mathcal{M}[\mathbf{x}]$ est utilisée plus fréquemment comme critère $J[\mathbf{x}]$, et la minimisation se fait généralement dans des espaces métriques. Dans le cas où les erreurs de données sont une réalisation d'un bruit blanc gaussien, la minimi-

sation de ce critère d’erreur donne les mêmes résultats que la méthode à maximum de vraisemblance [23]. Mais dans plusieurs cas, ce critère de fidélité aux données ne permet pas à lui-seul de produire une solution suffisamment stable (§ 3.3) à cause de la présence du bruit qui rend l’énergie du mesurande reconstitué très grande pour les hautes fréquences. Pour cela, nous utiliserons souvent ce critère d’erreur combiné avec d’autres contraintes supplémentaires afin d’obtenir une solution optimale unique et stable au problème. Parmi les contraintes supplémentaires, nous retrouvons la minimisation de l’énergie [42], la maximisation de la puissance [43] et la maximisation de l’entropie [44] du mesurande reconstitué. Les méthodes de reconstitution fondées sur ce principe variationnel conduisent souvent à des algorithmes très efficaces. Nous retrouverons, dans cette classe, la méthode avec régularisation au sens de Tikhonov [10, 45, 20] (régularisation continue), la méthode avec régularisation au sens de Phillips et Twomey [46, 47] (régularisation discrète), la méthode des moindres carrés avec contraintes [48], la méthode de projection sur des ensembles convexes (POCS) [39].

- **Méthodes probabilistes**: elles consistent à contraindre l’ensemble des solutions admissibles rendant certaines d’entre elles plus probables que d’autres. En effet, dans cette classe de méthodes, le mesurande et/ou les données sont supposés d’être des réalisations de deux processus aléatoires et l’information *a priori* porte alors sur les lois de probabilités de ces processus. Le problème de reconstitution devient un problème classique d’estimation dans lequel cette information *a priori* est utilisée pour optimiser un estimateur optimal. Nous distinguons plusieurs méthodes qui utilisent ce principe combiné avec celui des méthodes variationnelles: méthode bayésienne [24], méthode à vraisemblance maximale [37, 49], méthode à variance minimale [50, 51, 52], filtre de Wiener [23].

- **Méthodes itératives**: elles consistent à contraindre l’ensemble des solutions admissibles à celui des solutions qui peuvent être générées par une procédure itérative et qui convergent à la solution exacte pourvu que les données sont non bruitées:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \Psi(\mathbf{x}^k) \tag{4.2}$$

où k est le numéro d'itération et Ψ est un opérateur qui peut être déterminé à partir du modèle de données. Ces méthodes sont couramment utilisées vue leur simplicité, la facilité d'incorporation des contraintes déterministes (telles que la positivité du signal et spectre borné). Cependant, en général elles nécessitent une forte quantité de calcul à cause du grand nombre d'itérations demandées pour l'approximation optimale de la solution. Bien entendu, si nous utilisons une méthode itérative pour la résolution numérique d'un problème, une règle d'arrêt doit être fixée pour terminer l'itération. Un choix naturel de règle d'arrêt est l'évolution de l'erreur résiduelle évaluée par la norme:

$$\| \tilde{\mathbf{y}} - \mathcal{M}[\mathbf{x}^k] \| \leq \gamma , \quad (4.3)$$

ou bien l'évolution de l'erreur d'estimation évaluée par la norme:

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \epsilon , \quad (4.4)$$

où $\gamma > 0$ et $\epsilon > 0$ sont des seuils d'arrêts étant choisis au début des itérations. La méthode de reconstitution itérative la plus ancienne est celle de Van Cittert qui date depuis 1930 [53]. D'autres auteurs ont utilisé cette technique itérative et ont suggéré des modifications sur la méthode afin d'accélérer la convergence vers la solution optimale et aussi améliorer le résultat de reconstitution. Dans ce sens, nous distinguons diverses méthodes : méthode de Bialy et Landweber [54, 55], méthode de Jansson [19], méthode du gradient conjugué [56], etc [57, 58, 59].

• **Méthodes paramétriques**: elles consistent à contraindre l'ensemble des solutions admissibles à ceux des fonctions connues $\mathbf{x}(t; \mathbf{p})$, paramétrées en \mathbf{p} . Le problème se réduit ainsi à déterminer le vecteur des paramètres \mathbf{p} . La paramétrisation du signal reconstitué peut être linéaire ou non linéaire. La paramétrisation linéaire est plus désirée vu qu'elle conduit à des algorithmes de reconstitution simple. Cependant, la paramétrisation non linéaire, en général utilise moins de paramètres et offre plus de flexibilité en ce qui concerne la représentation du signal reconstitué [49, 60, 61].

• **Méthodes de transformation**: elles consistent en la formulation des contraintes en utilisant différents domaines de transformation, en particulier:

- domaine spectral [45],

- domaine cepstral [62].

La très grande variété de méthodes de reconstitution que nous venons de décrire dans ce paragraphe montrent bien qu'il y a une abondance exceptionnelle d'approches et d'idées qui ont été vérifiées et testées dans le domaine de la reconstitution des signaux (mesurandes). Cela démontre qu'aucune méthode de reconstitution n'a prouvé son efficacité et sa suprématie dans tous les domaines d'applications. Chaque classe de méthodes possède son champ d'applications spécial là où d'autres échouent ou donnent des performances (exactitude, quantité de calcul) inférieures. Nous comprenons donc, que le choix d'une méthode de reconstitution dépend de l'application en question en premier lieu et des facilités offertes par les outils matériels et logiciels, en deuxième lieu.

4.2 Algorithmes de référence utilisés

Dans le but de comparer les performances de nos algorithmes de reconstitution proposés, nous décrivons dans cette section certains algorithmes de référence utilisés dans les deux domaines d'applications qui seront traités dans cette thèse.

4.2.1 Algorithmes de référence utilisés pour l'application en spectrométrie

Méthode de reconstitution avec régularisation de Tikhonov : La méthode de reconstitution avec régularisation de Tikhonov [10, 45] utilise une régularisation continue. Nous considérons que le mesurande, les données de mesure et la réponse impulsionnelle appartiennent à un espace fonctionnel $\mathbf{L}^2(R)$ qui forme l'ensemble de tous les signaux (fonctions réelles du temps définies sur l'intervalle $[0, T]$) de carré intégrable dont la norme est définie par:

$$\|x(t)\|_{\mathbf{L}^2} = \left[\int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

En ce sens, le modèle de données de mesure sera de la forme:

$$\tilde{y}(t) = g(t) * x(t) + \eta(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \quad (4.6)$$

où “*” est l’opérateur de convolution, $\eta(t)$ est supposé être une réalisation d’un processus aléatoire ergodique $\underline{\eta}(t)$ non corrélé; avec $E[\underline{\eta}(t)]=0$ et $\text{Var}[\underline{\eta}(t)]=\sigma_\eta^2$. L’hypothèse d’ergodisme nous permet de déterminer les caractéristiques statistiques du processus à partir d’une seule réalisation.

L’idée de base de la régularisation est de définir un critère qui permet de sélectionner une solution approchée parmi l’ensemble des solutions admissibles. Par une simple observation du modèle de données (Eq. (4.6)), il est plausible que la classe des solutions admissibles sera décrite par l’erreur résiduelle :

$$\|\tilde{y}(t) - g(t) * x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\eta(t)\| \leq \Delta_Y, \quad (4.7)$$

où Δ_Y est un seuil lié à l’incertitude sur les données de mesure. Or, nous savons que cette classe de solutions contient des solutions inacceptables à cause du mal-conditionnement du problème de reconstitution. Tikhonov a défini une solution régularisée comme celle qui minimise une fonctionnelle stabilisatrice $J[x]$ sur l’ensemble des solutions admissibles. Comme choix de $J[x]$, la norme définie dans l’espace Sobolev \mathbf{W}_2^p (espace des fonctions de carré intégrable admettant des dérivées généralisées jusqu’à l’ordre p):

$$J[x(t)] = \|x(t)\|_{\mathbf{W}_2^p}^2 = \int_0^T \sum_{i=0}^p q_i(t) (x^{(i)}(t))^2 dt, \quad (4.8)$$

où $x^{(i)}$ désigne la dérivée i -ème de x et $q_i(t)$ ($i = 0, \dots, p$) sont des stabilisateurs d’ordre p . Ainsi donc, il approche la solution recherchée par les fonctions “les plus lisses” (jusqu’à l’ordre p). Dans le cas traité par Tikhonov où $p = 1$ et $q_0(t) = q_1(t) = 1$, nous avons :

$$J[x(t)] = \|x(t)\|_{\mathbf{W}_2^1}^2 = \|x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|x^{(1)}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (4.9)$$

Le problème de reconstitution se réduit ainsi à la minimisation de (4.9) sous la contrainte (4.7). En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous devons

minimiser la fonction objective suivante :

$$J_\alpha[\hat{x}(t)] = \|\tilde{y}(t) - g(t) * x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha \|x(t)\|_{\mathbf{W}_2^1}^2, \quad (4.10)$$

où $\alpha > 0$ est le paramètre de régularisation. Nous cherchons alors une solution qui soit mieux conditionnée et qui adoucit les effets du bruit surtout pour les composantes hautes fréquences de $x(t)$. Ainsi, le premier terme de l'équation (4.10), qui constitue l'erreur résiduelle, va contrôler les composantes basses fréquences de $x(t)$ et le contrôle des composantes hautes fréquences est effectué par la norme de lissage de $x(t)$ dans l'espace Sobolev.

En utilisant la méthode de transformation dans le domaine spectral (par l'intermédiaire de l'identité de Parseval [14]), le problème revient à minimiser le critère suivant:

$$J_\alpha[\hat{\mathbf{x}}] = \frac{1}{2\pi} \left\| \mathcal{G}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega) - \tilde{\mathcal{Y}}(j\omega) \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha \frac{1}{2\pi} \left\| (1 + \omega^2)\mathcal{X}(j\omega) \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \quad (4.11)$$

où $\mathcal{X}(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$, $\mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ et la solution de cette minimisation donne [45]:

$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{\mathcal{Y}}(j\omega) \mathcal{G}^*(j\omega)}{|\mathcal{G}(j\omega)|^2 + \alpha(1 + \omega^2)} \right\} \quad (4.12)$$

Le choix du paramètre de régularisation α doit entraîner un compromis entre l'exactitude et la stabilité. Il existe de nombreuses procédures de choix optimal de α en fonction d'une certaine information *a priori* [10, 63]. Une solution très simple consiste à chercher α par itération jusqu'à ce que la condition (4.7) soit satisfaite par égalité.

Certaines classes de mesurandes à reconstituer, par exemple des spectres dans le domaine de la spectrométrie, exigent que la solution doit être positive. En effet, nous pouvons améliorer la résolution des mesurandes reconstitués en ajoutant la contrainte de positivité dans la solution finale. Mais, l'introduction de cette contrainte, qui est non linéaire, dans l'algorithme de Tikhonov nécessite des boucles d'itérations additionnelles [64].

Méthode itérative de Van Cittert : La méthode itérative de Van Cittert a été couramment utilisée comme une technique de reconstitution dans le domaine temporel. Elle est basée sur une méthode d'approximation successive pour estimer le mesurande $\hat{\mathbf{x}}$ en utilisant l'équation de convolution. La solution est cherchée selon une procédure itérative de la forme [53]:

$$\hat{\mathbf{x}}^0 = \tilde{\mathbf{y}}, \quad (4.13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \mu(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{g} * \hat{\mathbf{x}}^k), \quad (4.14)$$

où $\hat{\mathbf{x}}^k$ est le k -ième estimé de \mathbf{x} , μ est une constante et k le nombre d'itération.

Différents auteurs réfèrent cette itération à celle de Bially [54] ou Landweber [55]. Van Cittert utilise la correction $\mu(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{g} * \hat{\mathbf{x}}^k)$ pour ajuster le k -ième estimé de \mathbf{x} . Avec ce type de méthode, le nombre d'itérations nécessaire à aboutir à un estimé acceptable est souvent inconnu. Nous utilisons généralement un critère d'erreur tel que décrit par l'équation (4.7) et nous arrêtons la procédure d'itération dès que ce critère est satisfait [58, 57].

Le choix du paramètre μ doit garantir la convergence de l'algorithme. Pour analyser les conditions de convergence nous appliquons la transformée de Fourier à l'équation (4.14). Après substitutions successives, la relation (4.14) peut être ramenée à la forme suivante [65, 58]:

$$\hat{\mathcal{X}}^k(j\omega) = \frac{1 - [1 - \mu\mathcal{G}(j\omega)]^k}{\mathcal{G}(j\omega)} \tilde{\mathcal{Y}}(j\omega). \quad (4.15)$$

Cette équation décrit le filtre de reconstitution (linéaire et invariant) avec un paramètre de régularisation proportionnel à $1/k$. La condition suffisante pour la convergence de l'algorithme est :

$$|1 - \mu\mathcal{G}(j\omega)| < 1. \quad (4.16)$$

Dans ce cas, il est clair que quand l'algorithme converge ($1/k \rightarrow 0$), il converge à la solution du filtrage inverse [35]. Comme μ est un paramètre libre, la condition de convergence est équivalente à la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$Re[\mathcal{G}(j\omega)] > 0 \quad \forall \omega, \quad (4.17)$$

où $Re[\cdot]$ désigne l'opérateur de la partie réelle. Cela implique que la partie réelle de la fonction de transfert doit être toujours positive pour toutes les fréquences pour que l'algorithme converge. Dans plusieurs des cas, cette condition n'est pas toujours satisfaite. Pour surmonter ce problème et aussi réduire les artefacts présents dans le résultat de reconstitution, beaucoup d'auteurs ont proposé une modification dans la procédure d'itération de Van Cittert en introduisant des nouveaux signaux $\tilde{y}_1(t)$ et $g_1(t)$ de la façon suivante [19, 58]:

$$g_1(t) = g(t) * g(-t) , \quad (4.18)$$

$$\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}(t) * g(-t) . \quad (4.19)$$

Ces nouveaux signaux \tilde{y}_1 et \mathbf{g}_1 remplacent $\tilde{\mathbf{y}}$ et \mathbf{g} respectivement, dans les équations (4.14)–(4.17). La convolution de $g(t)$ avec $g(-t)$ est équivalente à la multiplication de $\mathcal{G}(j\omega)$ par son complexe conjugué assurant par la suite que toutes les composantes de $\mathcal{G}'(j\omega)$ sont positives. Avec cette modification, nous pouvons réduire les composantes hautes fréquences du bruit et ainsi améliorer l'exactitude du résultat de reconstitution. En effet, l'opération de (4.19) peut être vue comme une opération d'intercorrélation entre $\tilde{\mathbf{y}}$ et \mathbf{g} . Le bruit affectant les résultats de mesure est alors réduit grâce à la propriété des fonctions d'intercorrélation qui permettent d'éliminer les composantes qui ne sont pas communes dans les deux signaux [19].

Une des avantages des méthodes itératives est la facilité d'introduire les contraintes déterministes non linéaires telles que la positivité du mesurande. Dans le cas de la méthode de Van Cittert, Schafer *et al.* [58] ont introduit la contrainte de positivité dans la procédure d'itération de façon suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^k + \mu(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{g} * \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^k) , \quad (4.20)$$

où

$$\mathbf{C} = \text{diag}\{c_m\} \quad (4.21)$$

$$c_m = \begin{cases} 1, & \hat{x}_m^k \geq 0 \\ 0, & \hat{x}_m^k < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Le but de l'introduction de cette opération est de tronquer les artefacts négatifs dans le résultat d'estimation durant chaque itération. Dans le domaine de la spectrométrie, les résultats de reconstitution montrent que cette modification produit une meilleure reconstitution que celle de Van Cittert [19]. Notons, enfin, que cette méthode itérative nécessite une grande quantité de calcul due aux grands nombres de convolutions numériques exigées.

Méthode itérative de Jansson : L'affectation de positivité de solutions dans la méthode de Van Cittert de la façon décrite précédemment risque d'éliminer certaines informations importantes dans la solution. Pour surmonter ce problème, Jansson [19] a proposé une autre approche où il remplace le paramètre constant μ par une fonction de relaxation. Cette fonction est choisie de sorte que les estimés successives seront contraints à se situer entre une limite minimale x_{min} et une limite maximale x_{max} fixées à l'avance; ces limites correspondent aux limites physiques du mesurande à reconstituer. La méthode de Jansson est décrite par l'équation suivante [19]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \mathbf{r}[\hat{\mathbf{x}}^k] (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{g} * \hat{\mathbf{x}}^k) , \quad (4.23)$$

avec la fonction de relaxation:

$$\mathbf{r}[\hat{\mathbf{x}}^k] = \mu \left(1 - \frac{2}{x_{max}} \left| \hat{\mathbf{x}}^k - \frac{x_{max}}{2} \right| \right) , \quad (4.24)$$

où les estimés seront contraints à se situer entre 0 et x_{max} la limite maximale. La fonction de relaxation possède une forme linéaire dans des intervalles, toutefois une forme quadratique et gaussienne ont été vérifiées et les résultats de reconstitution n'ont pas donné une amélioration significative par rapport à la forme linéaire [19]. La méthode de Jansson produit des résultats de reconstitution meilleurs que ceux de Van Cittert avec et sans contrainte de positivité [22].

Méthode probabilistique basée sur le filtre de Kalman : L'apport essentiel de cette méthode est de remplacer l'équation intégrale de convolution discrétisé par un modèle d'état [66]:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_n + \mathbf{r} \xi_n \quad (4.25)$$

$$\tilde{y}_n = \mathbf{h}^T \mathbf{z}_n + \eta_n \quad (4.26)$$

pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$ et avec

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dim(\Phi) = M \times M \quad (4.27)$$

$$\mathbf{r} = [1 \mid 0 \mid \cdots \mid 0]^T, \dim(\mathbf{r}) = M \quad (4.28)$$

$$\mathbf{h} = [g_0 \mid g_1 \mid \cdots \mid g_{M-1}]^T, \dim(\mathbf{h}) = M \quad (4.29)$$

où N et M sont les nombres de points de discrétisation des données de mesure et du mesurande respectivement. Le vecteur d'état \mathbf{z}_n contient les échantillons du signal à reconstituer:

$$\mathbf{z}_n = [x_n \mid x_{n-1} \mid \cdots \mid x_0 \mid 0 \mid \cdots \mid 0]^T \quad (4.30)$$

avec l'hypothèse que le mesurande est généré selon la formule:

$$x_{n+1} = x_n + \xi_n \quad (4.31)$$

où ξ_n est une réalisation d'une variable aléatoire $\underline{\xi}_n$ centrée. L'équation de mesure (4.26) est déduite à partir de la discrétisation de l'équation intégrale de convolution:

$$\tilde{y}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_{n-k} x_k + \eta_n. \quad (4.32)$$

Les variables aléatoires $\underline{\eta}_n$ et $\underline{\xi}_n$ sont supposées être non corrélées et des estimés *a priori* de leurs variances respectives $\check{\sigma}_\eta^2$ et $\check{\sigma}_\xi^2$ sont disponible.

Le problème consiste maintenant à estimer le vecteur d'état \mathbf{z}_n en se basant sur les observations $\{\tilde{y}_n\}$. Le filtre de Kalman est un estimateur linéaire qui permet d'obtenir l'estimé $\hat{\mathbf{z}}_n$ du vecteur \mathbf{z}_n à variance minimale, c'est-à-dire pour lequel:

$$trace \left\{ (\hat{\mathbf{z}}_n - \mathbf{z}_n)(\hat{\mathbf{z}}_n - \mathbf{z}_n)^T \right\} \quad (4.33)$$

est minimale. L'estimé du vecteur d'état peut être obtenu par la récurrence suivante [67]:

$$\Sigma_{n+1}^+ = \Phi \Sigma_n \Phi^T + \check{\sigma}_\xi^2 \mathbf{r} \mathbf{r}^T \quad (4.34)$$

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_{n+1}^+ - \Sigma_{n+1}^+ \mathbf{h} \mathbf{h}^T \Sigma_{n+1}^+ [\mathbf{h} \Sigma_{n+1}^+ \mathbf{h}^T + \check{\sigma}_\eta^2]^{-1} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{k}_{n+1} = \Sigma_{n+1} \mathbf{h} / \check{\sigma}_\eta^2 \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{n+1} = \Phi \hat{\mathbf{z}}_n + \mathbf{k}_{n+1} (\tilde{y}_n - \mathbf{h}^T \Phi \hat{\mathbf{z}}_n) \quad (4.37)$$

et à partir de cet estimé on peut reconstituer le mesurande.

Une des avantages de ce filtre est que les trois premières équations du filtre peuvent être calculées indépendamment de toute mesure et avant même que celle-ci ne soit traitée par le filtre. En effet, les matrices et vecteurs qui interviennent dans ces trois expressions dépendent soit des paramètres du modèle soit de la connaissance *a priori* des statistiques du processus générateur $\{\xi_n\}$ et du bruit de mesure $\{\eta_n\}$. De plus, comme la matrice Φ et les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{h} sont invariants, le filtre de Kalman se comporte approximativement comme un filtre stationnaire dont les paramètres peuvent être déterminés *a priori* avant l'acquisition des données de mesure. Ainsi, la reconstitution du mesurande peut se faire en temps réel.

L'introduction d'une contrainte de positivité dans l'algorithme d'estimation peut se faire par la troncation des valeurs négatives des éléments de l'estimé de $\hat{\mathbf{z}}_n$ durant chaque itération [66].

4.2.2 Algorithmes de référence utilisés pour l'application en télécommunication

L'analyse de la disparité peut être définie comme la détermination des différences entre deux images de la même scène, prises à partir de points de vue différentes (deux caméras). L'attribution d'une disparité à des points dans une séquence d'images est équivalente à chercher la mise en correspondance entre un ensemble de points à partir

de chaque image [68]. Cette mise en correspondance se pose en des termes très différents selon le niveau auquel nous décidons de travailler:

- niveau du pixel;
- niveau des transitions d'intensité sur une ligne de l'image;
- niveau des caractéristiques (arcs de courbe, segments, jonctions, régions, etc.);
- niveau des objets.

Pour analyser le problème, nous supposons que le système de prise de vues possède une géométrie épipolaire (les lignes épipolaires sont parallèles aux lignes de balayage des images) de sorte que la recherche de correspondance se fait sur deux lignes de même numéro dans les deux vues (gauche et droite). Il en résulte ainsi des valeurs de disparité à une dimension (le décalage se fait sur l'axe horizontal t uniquement).

Nous avons vu dans le chapitre 2, que le problème consiste à estimer la fonction de disparité $x(t)$ de sorte que :

$$I_g(t) = I_d(t + x(t)) + \eta(t), \quad (4.38)$$

où $I_g(t)$ et $I_d(t)$ sont les intensités des points d'une ligne des images gauche et droite respectivement (cas de la stéréoscopie) et $\eta(t)$ représente le bruit qui affecte les images.

Une des approches pour résoudre ce problème est de minimiser la norme :

$$\| I_g(t) - I_d(t + x(t)) \|. \quad (4.39)$$

Une condition suffisante pour que la solution soit unique, est que $I_g(t)$ et $I_d(t)$ soient des fonctions monotones au sens strict. La monotonie au sens strict est une condition suffisante pour l'existence d'une fonction inverse. Dans le cas réel cette condition n'est pas toujours satisfaite. Il ressort que le problème inverse est mal posé [32], et qu'il faudra le régulariser en introduisant des contraintes supplémentaires de la classe de solutions admissibles [69].

La littérature foisonne d'articles proposant des algorithmes d'évaluation de disparité entre deux vues d'un même couple stéréoscopiques [33, 34, 70, 71]. Afin de comparer les performances de nos algorithmes proposés, nous donnons dans la suite une description de deux algorithmes de références basés sur deux approches différentes. Le premier algorithme est basé sur une méthode variationnelle [33], le deuxième est basé sur une méthode probabiliste [71].

Méthode de reconstitution avec régularisation de Tikhonov : La solution régularisée est définie comme celle qui minimise une fonctionnelle stabilisatrice $J[x]$ (Eq. (4.8)) sur l'ensemble des solutions admissibles (Eq. (4.39)). Dans le cas où $p = 1$, $q_0(t) = 0$ et $q_1(t) = 1$, on a :

$$J[x] = \|x^{(1)}(t)\|^2 = \int_T |x^{(1)}(t)|^2 dt . \quad (4.40)$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous devons minimiser la fonctionnelle:

$$J_\alpha[x] = \| I_g(t) - I_d(t + x(t)) \|^2 + \alpha \| x^{(1)}(t) \|^2 , \quad (4.41)$$

où α est le paramètre de régularisation. Cependant, une des caractéristiques de la fonction de disparité $x(t)$ est qu'elle peut être discontinue. De plus, il y a toujours la présence de phénomène d'occlusion, où certains éléments de la scène ne sont visible que dans l'une des deux images, et dans ce cas $x(t)$ n'est pas définie. En conséquence, la minimisation de (4.41) peut ne pas produire une solution physiquement acceptable, car elle exige que $x(t)$ soit une fonction continue et différentiable. En effet, Julesz [72] a observé que la fonction de disparité varie de façon continue à travers les régions non occluses et de façon discontinue uniquement dans les régions occluses.

Si nous admettons que la fonction de disparité est continue, la minimisation de (4.41) dans le cas 2-D, conduit à la solution de l'équation d'Euler-Lagrange:

$$\alpha \nabla x + [I_g(t, z) - I_d(t + x, z)] I_d^{(1)}(t + x, z) = 0 \quad (4.42)$$

où ∇x est le Laplacien de $x(t, z)$ défini par :

$$\nabla x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} , \quad (4.43)$$

et $I_d^{(1)}$ est le dérivé partiel de I_d par rapport à t . La version discrète de l'équation (4.42) est donnée par [33] :

$$x(m, n) = x^*(m, n) + \frac{1}{4\alpha} [I_g(m, n) - I_d(m + x, n)] I_d^{(1)}(m + x, n) \quad (4.44)$$

où nous avons utilisé l'approximation du Laplacien de $x(t, z)$ donnée par:

$$\nabla x = 4(x^*(m, n) - x(m, n)) \quad (4.45)$$

$$\bar{x}(m, n) = [x(m + 1, n) + x(m, n + 1) + x(m - 1, n) + x(m, n - 1)]/4 \quad (4.46)$$

Ainsi, la disparité $x(m, n)$ peut être cherchée en utilisant la procédure itérative de Gauss–Seidel :

$$x^{i+1}(m, n) = \bar{x}^i(m, n) + \frac{1}{4\alpha} [I_g(m, n) - I_d(m + x^i, n)] I_d^{(1)}(m + x^i, n) , \quad (4.47)$$

où i est le nombre d'itération. Comme $x(m, n)$ est généralement non entier, nous devons utiliser les fonctions d'interpolation telles que de Lagrange pour déterminer $I_d(m + x, n)$ ainsi que son gradient.

Dans le cas où la disparité présente des discontinuités, Terzopoulos [69] a proposé d'utiliser une autre fonctionnelle stabilisatrice avec continuité contrôlée décrite par:

$$J[x] = \int \varphi(t) |x^{(1)}(t)|^2 dt \quad (4.48)$$

où il a introduit une fonction de pondération $\varphi(t)$, non négative et discontinue, définie par:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x(t) \text{ est continue} \\ 0, & \text{si } x(t) \text{ est discontinue} \end{cases} \quad (4.49)$$

Ainsi, quand $\varphi(t) = 1$, $J[x]$ se réduit à celle définie par Tikhonov donnant une solution continue et lisse; quand $\varphi(t) = 0$, correspondant à des régions occluses, le processus de lissage est désactivé permettant par la suite d'avoir des discontinuités dans la solution. Contrairement à la stabilisatrice de Tikhonov qui est quadratique et définit une classe de méthodes de régularisation linéaire, la nouvelle fonctionnelle stabilisatrice, qui est généralement non quadratique, définit une classe de méthodes de régularisation non linéaires [69].

Méthode de la somme des différences au carrée (SSD) : Cette méthode est l'une des techniques de base de la stéréovision. La mise en correspondance se fait au niveau de chaque pixel en calculant la somme des différences au carrée (SSD : *Sum of Squared Differences*) des intensités dans une petite fenêtre. Nous commençons par définir un ensemble de mesures, fonction de la disparité, puis formuler la densité de probabilité conditionnelle de ces mesures par rapport à la disparité. L'estimateur de la disparité sera celui qui maximise cette probabilité conditionnelle [34, 71].

Nous utilisons comme mesure, la différence entre les intensités des images dans une fenêtre de largeur W , autour des pixels qui vont être comparés. Nous supposons que la disparité $x(t)$ est constante le long de la fenêtre et le bruit $\eta(t)$, qui affecte les images, est une réalisation d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ_η^2 .

Si x_0 est l'estimé initial de la disparité, en utilisant l'expansion en série de Taylor jusqu'au premier ordre de $I_d(t + x)$ autour de x_0 , on a :

$$I_d(t + x) = I_d(t + x_0) + \Delta x I_d^{(1)}(t + x_0) \quad (4.50)$$

où $\Delta x = x - x_0$. En remplaçant cette équation dans (4.38), nous aurons [71]:

$$\psi_1(t) - \Delta x \psi_2(t) = \eta(t) \quad (4.51)$$

avec

$$\psi_1(t) = I_g(t) - I_d(t + x_0) \quad (4.52)$$

$$\psi_2(t) = I_d^{(1)}(t + x_0) \quad (4.53)$$

La version discrète de l'équation (4.51) le long de la fenêtre est:

$$\eta_i = \psi_1(\tau_i) - \Delta x \psi_2(\tau_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.54)$$

où nous avons subdivisé la fenêtre de largeur W en N échantillons $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$. Comme $\eta(t)$ est un bruit blanc gaussien, les η_i sont indépendants et nous pouvons définir donc la fonction de distribution conditionnelle des η_i sachant Δx :

$$p(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1} | \Delta x) = \prod_{i=0}^{N-1} p(\eta_i | \Delta x), \quad (4.55)$$

avec

$$p(\eta_i|\Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_\eta} \exp\left[-\frac{(\psi_1(\tau_i) - \Delta x \psi_2(\tau_i))^2}{2\sigma_\eta^2}\right]. \quad (4.56)$$

En utilisant le théorème de Bayes avec certains arrangements, nous obtenons [71] :

$$p(\Delta x|\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\Delta x}} \exp\left[-\frac{(\Delta x - \hat{\Delta}x)^2}{2\sigma_{\Delta x}^2}\right], \quad (4.57)$$

avec

$$\hat{\Delta}x = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \psi_1(\tau_i)\psi_2(\tau_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} (\psi_2(\tau_i))^2}, \quad (4.58)$$

$$\sigma_{\Delta x}^2 = \frac{2\sigma_\eta^2}{\sum_{i=0}^{N-1} (\psi_2(\tau_i))^2}. \quad (4.59)$$

Ainsi, la densité de probabilité conditionnelle de Δx sachant les observations $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}$, à l'intérieur de la fenêtre, est gaussienne de moyenne $\hat{\Delta}x$ et de variance $\sigma_{\Delta x}^2$. Les deux dernières équations nous permettent d'obtenir un estimé de la disparité $\hat{\Delta}x$ et son incertitude $\sigma_{\Delta x}^2$. Nous pouvons corriger l'estimé de la disparité en remplaçant x_0 par $(x_0 + \hat{\Delta}x)$ et en faisant la procédure itérative.

Dans cette méthode, la largeur de la fenêtre W joue le rôle de paramètre de régularisation. Son choix entraîne un compromis, d'une part une fenêtre large tend à augmenter la variation de l'intensité et en même temps tend à introduire plus d'informations sur la disparité, et d'autre part si la variation de la disparité est grande et la fenêtre est petite, les différences ne seront pas calculées aux positions correspondantes et l'estimation de la disparité sera incorrecte. Okutomi *et al.* [71] ont proposé d'utiliser une largeur de fenêtre adaptative pour optimiser la valeur de W .

4.3 Méthodologie de l'évaluation des algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques

4.3.1 Principe

Le choix d'une méthode de reconstitution depend essentiellement des exigences concernant le système de mesure: son exactitude, sa vitesse et sa complexité. Ainsi, la qualité de la mise en oeuvre d'un algorithme de reconstitution de mesurande se mesure à l'aide de ces trois exigences, à savoir:

1. l'exactitude de reconstitution;
2. la rapidité en réponse et la reconstitution en temps réel;
3. la complexité de calcul et espace de mémoire requise.

Ainsi, l'étude des algorithmes de reconstitution sera essentiellement portée à leur évaluation en utilisant ces critères et en utilisant aussi bien des données synthétiques que expérimentales.

Selon le domaine d'applications traitées (en spectrométrie et en télécommunication), les performances des algorithmes de reconstitution proposés seront comparées à celles des algorithmes de référence utilisés dans ce domaine.

4.3.2 Génération des données synthétiques

Pour l'application en spectrométrie, les données de mesure synthétiques exactes $y(\lambda)$ sont celles utilisées par Crilly [22]. Elles sont simulées en utilisant la relation:

$$y(\lambda) = g(\lambda) * x(\lambda) , \quad (4.60)$$

où nous considérons que le mesurande exacte $x(\lambda)$ et la réponse impulsionnelle du spectromètre $g(\lambda)$ sont connus à l'avance. La séquence $\{\tilde{y}_n\}$ est générée selon l'équation:

$$\tilde{y}_n = y(\lambda_n) + \eta_n \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.61)$$

en utilisant une séquence de nombres pseudo-aléatoires $\{\eta_n\}$ normalement distribués, de moyenne nulle et de variance connue σ_η^2 . Ainsi, la connaissance de $\{\tilde{y}_n\}$ et de $g(\lambda)$ nous permettra de reconstituer le mesurande.

Pour l'application en télécommunication, comme la recherche de correspondance se fera sur la même ligne de balayage pour les deux images (traitement à 1-D), la simulation des données synthétiques sera effectuée en prenant une ligne de balayage d'une image réelle quelconque, pour obtenir ainsi la ligne droite $I_d(n)$, à laquelle nous appliquons une fonction de disparité exacte $x(n)$ afin d'obtenir la ligne gauche $I_g(n)$ selon la relation suivante:

$$I_g(n) = I_d(n + x(n)) + \eta_n \quad n = 0, \dots, N - 1, \quad (4.62)$$

où $\{\eta_n\}$ est une séquence de nombres pseudo-aléatoires modélisant les erreurs de mesure. Différentes formes de la fonction de disparité (continue, discontinue, grandes et faibles variations) seront utilisées.

4.3.3 Acquisition des données réelles

Les données spectrométriques réelles ont été acquises à l'aide du spectromètre MILTON-ROY Spectronic 3000 Array avec les paramètres instrumentales suivantes:

- plage du longueur d'onde : 240–540 *nm*;
- largeur du fente spectrale : 2 *nm*;
- largeur du fente du détecteur : 0.37 *nm*;
- temps d'exposition : 540 *ms*.

D'autres données réelles prélevées avec d'autres spectromètres seront aussi utilisées pour tester les algorithmes.

Pour l'application en télécommunication, le test avec des données réelles sera effectué en utilisant des images stéréoscopiques réelles.

4.3.4 Procédure d'évaluation des algorithmes

Suivant l'application traitée, un algorithme de reconstitution de mesurande peut être évalué selon la procédure suivante:

- Un problème test: il s'agit de prendre un exemple commun de données de mesure synthétiques traitées dans la littérature et qui représentent de façon raisonnable la situation réelle. Ces données sont générées en supposant que le modèle de données et le mesurande sont connus de façon exacte.
- Exactitude de reconstitution: l'erreur de reconstitution entre la valeur exacte du mesurande et celle estimée caractérise principalement l'exactitude de l'algorithme de reconstitution. Elle peut être évaluée de différentes manières:

- erreur quadratique moyenne (*MSE*):

$$\varepsilon_e = \|\overset{\circ}{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{L}^2} \quad (4.63)$$

- erreur quadratique moyenne relative (*RMSE*):

$$\varepsilon_r = \frac{\|\overset{\circ}{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{L}^2}}{\|\overset{\circ}{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{L}^2}} \quad (4.64)$$

- rapport signal-bruit amélioré (*SNRI*):

$$\rho_a = \frac{\left\| \frac{\overset{\circ}{\mathbf{x}}}{\|\overset{\circ}{\mathbf{x}}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\|_{\mathbf{L}^2}}{\|\overset{\circ}{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{L}^2}} \quad (4.65)$$

- Vitesse et complexité de calcul: le nombre d'opérations arithmétiques (additions et multiplications) nécessité par l'algorithme de reconstitution.
- Espaces des paramètres de l'algorithme: il s'agit d'analyser l'influence de la variation des paramètres libres de l'algorithme de reconstitution sur l'erreur de reconstitution. Cette analyse nous informe sur le domaine où l'algorithme donne les meilleurs performances. Nous pouvons citer comme paramètres libres: le nombre de points du mesurande, la variance du bruit de mesure σ_η^2 , paramètre de régularisation, etc.

Chapitre 5

ALGORITHMES DE RECONSTITUTION PROPOSÉS POUR L'APPLICATION EN SPECTROMÉTRIE

5.1 Modèle mathématique des données de mesure pour la correction de la résolution des analyses spectrométriques

Dans les analyses spectrométriques, la mesure du spectre d'absorption d'une substance est affectée par des erreurs systématiques dues aux imperfections et limitations de l'instrument de mesure (le spectromètre). Ces erreurs provoquent la distorsion des caractéristiques de la grandeur à mesurer (par exemple recouvrement des raies voisines, présence des artefacts, etc . . .) et compliquent son interprétation exacte. En conséquence, la réponse impulsionnelle du spectromètre ne peut pas être raisonnablement approchée par une impulsion de Dirac, et le modèle des résultats de mesure prend alors la forme d'une intégrale de convolution linéaire [19]:

$$y(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda - \lambda') x(\lambda') d\lambda' \quad (5.1)$$

$$\tilde{y}_n = y(\lambda_n) + \eta_n \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (5.2)$$

où λ est la longueur d'onde, $x(\lambda)$ est le spectre d'absorption exacte, $g(\lambda)$ la réponse impulsionnelle du spectromètre dont la forme ressemble à une gaussioïde raide et η_n représente les erreurs de mesure.

Dans la suite, nous supposons que les signaux spectrométriques $x(\lambda)$, $g(\lambda)$ et $\tilde{y}(\lambda)$ sont des éléments de l'espace des fonctions réelles $\mathbf{L}^2(R)$ et ils sont à support borné:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= 0 && \text{pour } \lambda \notin [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \\ g(\lambda) &= 0 && \text{pour } \lambda \notin [\lambda'_{min}, \lambda'_{max}] \\ \tilde{y}(\lambda) &= 0 && \text{pour } \lambda \notin [\lambda_{min} + \lambda'_{min}, \lambda_{max} + \lambda'_{max}]. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons normaliser l'équation (5.1) de sorte que $x(\lambda)$, $g(\lambda)$ et $\tilde{y}(\lambda)$ soient nuls pour $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= 0 && \text{pour } \lambda \notin [0, \lambda_{max} - \lambda_{min}] \\ g(\lambda) &= 0 && \text{pour } \lambda \notin [0, \lambda'_{max} - \lambda'_{min}] \\ \tilde{y}(\lambda) &= 0 && \text{pour } \lambda \notin [0, \lambda_{max} - \lambda_{min} + \lambda'_{max} - \lambda'_{min}]. \end{aligned}$$

5.2 Choix des méthodes de reconstitution

Nous avons vu aux chapitres précédents que les techniques de régularisation jouent un rôle important dans l'obtention d'une solution acceptable à un problème mal posé. Elles permettent de réduire la dimension de l'espace des solutions admissibles et d'isoler un ensemble de solutions acceptables. Parmi ces techniques, les méthodes itératives restent encore les plus populaires dans le domaine de la spectrométrie [19, 22]. Les principales avantages de ces méthodes sont:

- simplicité logique;
- possibilité d'introduire des contraintes non linéaires de type déterministe;
- possibilité d'arrêter l'itération quand le critère d'erreur dépasse un certain seuil fixé à l'avance;
- aucune exigence concernant la connaissance *a priori* des statistiques des données.

Bien qu'elles soient attractives, elles ne permettent pas de contrôler l'effet du bruit [22]. En effet, la majorité des algorithmes itératifs existants sont dérivés sans tenir en compte de façon explicite la présence du bruit dans les données de mesure, ce qui engendre une amplification du bruit au fur et à mesure que le nombre d'itération augmente pour $k > k_{opt}$. De plus, elles nécessitent une forte quantité de calcul à cause du grand nombre d'itérations demandées pour trouver une solution optimale.

En même temps, dans d'autres domaines tels que géophysique et spectrométrie, d'autres techniques de régularisation plus efficaces commencent à recevoir une attention considérable, en particulier les méthodes variationnelles et paramétriques [12, 45, 62]. Elles ont justement l'avantage de contrôler l'effet du bruit par l'introduction de contraintes sous forme de fonctions stabilisatrices (lissage, entropie maximale, etc.). Elles conduisent, généralement, à des algorithmes efficaces qui offrent une solution optimale au problème de reconstitution [10, 37].

Dans le but d'améliorer la résolution des données spectrométriques nous proposons d'utiliser les deux principes (variationnel et paramétrique) ensemble pour la reconstitution du signal spectrométrique. Notre approche consiste à approximer la solution de reconstitution par des fonctions splines cubiques combinée avec l'utilisation de contraintes de régularisation multiple dérivées à partir des informations *a priori* sur le signal spectrométrique idéal et sur le bruit de mesure. Cette approche nous permet de reconstituer le signal entre les instants d'échantillonnage et par la suite elle diminue l'effet des erreurs de quadratures et améliorer l'exactitude de reconstitution. Pour cela, nous proposons deux algorithmes pour la reconstitution du mesurande (signal spectrométrique):

- algorithme OPT_SPL (spline avec optimisation) [60] basé sur l'estimation des paramètres de la fonction spline $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p}) = x(\lambda)$ utilisant une optimisation non quadratique avec contraintes;
- algorithme KAL_SPL (spline avec filtre de Kalman) [73] basé sur l'estimation des paramètres de la fonction spline $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p}) = x(\lambda)$ à l'aide du filtre de Kalman. L'algorithme KAL_SPL offre notamment la possibilité d'un traitement en ligne

nécessaire pour une reconstitution en temps réel et permet de s'étendre au cas des modèles de données non stationnaires.

5.3 Description des algorithmes proposés

5.3.1 Algorithme OPT_SPL

L'algorithme de reconstitution OPT_SPL est basé sur une paramétrisation linéaire du mesurande [60]:

$$\hat{x}(\lambda; \mathbf{p}) = \sum_{m=0}^{M-1} [\mathbf{1}(\lambda - \lambda_m) - \mathbf{1}(\lambda - \lambda_{m+1})] P_m(\lambda - \lambda_m) \quad (5.3)$$

$$P_m(\lambda) = \sum_{k=0}^3 p_{4m+k} \lambda^k \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.4)$$

où $\lambda_m = m\Delta\lambda'$ ($m = 0, 1, \dots, M-1$) représente la grille de discrétisation de l'axe λ pour $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ avec un pas de discrétisation $\Delta\lambda'$, $\mathbf{p} = [p_0|p_1|\dots|p_{4M-1}]^T$ est le vecteur des paramètres, $\dim(\mathbf{p})=4M$, M est le nombre d'intervalles qui subdivisent le support du mesurande et $\mathbf{1}(\lambda)$ désigne l'échelon unité. Le modèle des données de mesure (Eq. (5.2)) discrétisé correspondant avec la formulation de $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ a la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &= \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} g(\lambda - \lambda') \hat{x}(\lambda'; \mathbf{p}) d\lambda' + \eta_n \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \int_{\lambda'_m}^{\lambda'_{m+1}} g(\lambda - \lambda') P_m(\lambda' - \lambda'_m) d\lambda' + \eta_n \\ &= \sum_{k=0}^{4M-1} G_{n,k} p_k + \eta_n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec

$$G_{n,4m+j} = \int_{\lambda'_m}^{\lambda'_{m+1}} g(\lambda_n - \lambda') (\lambda' - \lambda'_m)^j d\lambda', \quad (5.6)$$

pour $m = 0, 1, \dots, M-1$ et $j = 0, 1, 2, 3$. Cette intégrale peut être déterminée de façon analytique ou numérique selon la représentation de la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$. En expression matricielle, l'équation (5.5) sera :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \mathbf{p} + \boldsymbol{\eta}, \quad (5.7)$$

avec $\dim(\mathbf{G})=N \times 4M$.

À première vue, la représentation matricielle (5.7) ressemble à celle donnée par la discrétisation de l'équation de convolution (approximation d'une intégrale par une somme finie), utilisée fréquemment dans la grande majorité des cas traités dans la littérature. Cependant, cette dernière suppose que les échantillons de $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ sont constants durant la période d'échantillonnage alors qu'ils ne le sont pas dans notre modélisation. En conséquence, les effets des erreurs de quadrature seront minimisés dans notre cas, et nous aurons une bonne approximation du mesurande continu $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ entre les instants d'échantillonnage. Il ressort, donc, le premier avantage de cet algorithme, qui aura comme effet l'amélioration de l'exactitude de l'opération de reconstitution qui constitue un des objectifs à atteindre.

Le problème consiste, maintenant, à déterminer le vecteur des paramètres \mathbf{p} pour reconstituer le mesurande $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$. Or, nous savons que la résolution directe de ce système d'équations linéaires (5.7) généralement ne constitue jamais une bonne solution [37]. Nous avons exposé au chapitre 3 les difficultés qui résultent de la résolution de ce système à cause du caractère mal posé du problème de reconstitution. La résolution de ce problème ne peut se faire correctement qu'en exploitant les informations *a priori* que l'on a sur la classe des mesurandes à reconstituer. En d'autres termes, il faut utiliser un mécanisme de régularisation du problème, qui est le seul capable de nous permettre de sélectionner une solution optimale parmi l'ensemble des solutions admissibles. Certes, la recherche de la solution optimale repose essentiellement sur l'exploitation judicieuse des informations *a priori*, et par conséquent sur l'utilisation des contraintes de régularisation multiple. L'idée d'utiliser une régularisation multiple permet de restreindre davantage la solution d'être un élément d'un ensemble de fonctions satisfaisant des propriétés bien particulières.

À partir du modèle de données de mesure, nous pouvons remarquer qu'il y a deux sources d'informations *a priori* qui peuvent être traduites en des contraintes: les propriétés du bruit de mesure et les propriétés du mesurande à reconstituer. En ce

sens, quatre contraintes nous ont paru naturelles pour le problème de la correction des données spectrométriques, [60]:

- la solution $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ est une fonction spline cubique continue avec sa première et sa deuxième dérivée;
- la solution $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ est de norme minimale (norme euclidienne);
- la norme euclidienne de l'erreur résiduelle $(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{G} \mathbf{p})$ est inférieure à un seuil tolérable basé sur la variance actuelle du bruit;
- la solution $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ est positive (le spectre d'absorption réel est toujours positif).

Par imposition de la première contrainte, nous forçons la solution recherchée d'être un élément de l'ensemble des fonctions qui peuvent être bien approximées par les fonctions splines cubiques.

Une fonction dite *spline* est une fonction formée de morceaux de polynômes qui se raccordent, ainsi que certaines de leurs dérivées, aux points de jonction. Dans le cas des fonctions splines cubiques, entre deux points donnés nous utilisons un polynôme cubique. Au point de jonction de deux cubiques les dérivées, premières et secondes, doivent coïncider afin d'obtenir les mêmes pentes et les mêmes courbures [74].

L'avantage de l'utilisation des fonctions splines cubiques pour la paramétrisation de la solution réside dans la meilleure approximation ainsi que la grande flexibilité qu'offrent ce type de fonction. En effet, avec ce type d'approximation le nombre de points de jonctions, leurs emplacement, ainsi que les coefficients correspondants sont des paramètres libres, permettant l'utilisation d'une grille de discrétisation non uniforme pour représenter le mesurande. Cela va nous permettre d'élargir le champ d'application potentielle de l'algorithme de reconstitution proposé au cas des signaux à échantillonnage non périodique, un problème souvent rencontrés dans le domaine du contrôle/commande des procédés industriels [75].

En outre, nous avons vu qu'avec la régularisation de Tikhonov la solution régularisée est définie par imposition d'une contrainte de lissage sur le mesurande. Au

lieu d'imposer une contrainte de lissage, nous pouvons utiliser les fonctions splines qui sont flexibles pour représenter le mesurande. Cette flexibilité est désirée dans le cas où le mesurande possède, en plus des propriétés de lissage, une dynamique de variation (lente et rapide).

Ainsi, la première contrainte peut être traduite par le fait qu'aux points de jonction, la fonction spline cubique doit être continue ainsi que les dérivées première et seconde. La formulation analytique de cette contrainte peut être exprimée sous la forme d'un système d'équations algébriques :

$$P_m(\Delta\lambda') = P_{m+1}(0) \quad (5.8)$$

$$P_m^{(1)}(\Delta\lambda') = P_{m+1}^{(1)}(0) \quad (5.9)$$

$$P_m^{(2)}(\Delta\lambda') = P_{m+1}^{(2)}(0), \quad (5.10)$$

pour $m = 0, 1, \dots, M - 2$, soit sous forme matricielle :

$$\mathbf{C} \mathbf{p} = \mathbf{0}_{3M-3,1}, \quad (5.11)$$

où les exposants entre parenthèses indiquent les dérivées correspondantes, \mathbf{C} est une matrice dont les éléments ne dépend que de $\Delta\lambda'$, avec $\dim(\mathbf{C})=(3M - 3) \times 4M$.

Puisqu'on a $4M$ paramètres à déterminer avec $(3M - 3)$ équations, il s'en suit qu'uniquement $4M - (3M - 3) = (M + 3)$ éléments du vecteur \mathbf{p} sont indépendants et les $(3M - 3)$ autres éléments peuvent être éliminés en utilisant la décomposition suivante de (5.11):

$$\mathbf{C}_I \mathbf{p}_I + \mathbf{C}_D \mathbf{p}_D = \mathbf{0}_{3M-3,1}, \quad (5.12)$$

où \mathbf{p}_I est le vecteur des paramètres indépendants avec $\dim(\mathbf{p}_I)=(M + 3)$, \mathbf{p}_D est le vecteur des paramètres dépendants avec $\dim(\mathbf{p}_D)=(3M - 3)$ et \mathbf{C}_D est une matrice carré non singulière avec $\dim(\mathbf{C}_D)=(3M - 3) \times (3M - 3)$. Ainsi, nous avons:

$$\mathbf{p}_D = -\mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{C}_I \mathbf{p}_I. \quad (5.13)$$

De la même manière, nous pouvons utiliser cette décomposition de paramètres dans le modèle des données de mesure (5.7), nous obtenons dans ce cas après substi-

tution de (5.13) :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H} \mathbf{p}_I + \boldsymbol{\eta} , \quad (5.14)$$

avec $\mathbf{H} = (\mathbf{G}_I - \mathbf{G}_D \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{C}_I)$ et $\dim(\mathbf{H}) = N \times (M + 3)$. De cette façon, la première contrainte est ainsi introduite dans le modèle des données. Le problème de la détermination du vecteur des paramètres \mathbf{p} (de dimension $4M$) est ainsi réduit à la détermination du vecteur des paramètres indépendants \mathbf{p}_I (de dimension $(M + 3)$).

La deuxième contrainte consiste à minimiser l'énergie de $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ dans un espace fonctionnel (espace de Hilbert \mathbf{L}^2). La raison de cette minimisation est de contrôler l'amplification du bruit dans la solution, car l'énergie du mesurande reconstitué est très grande pour les hautes fréquences, principalement à cause de la présence du bruit. Cette contrainte peut se traduire par la relation suivante (voir appendice A):

$$\|\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})\|_{L^2}^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \int_{\lambda'_m}^{\lambda'_{m+1}} P_m^2(\lambda' - \lambda'_m) d\lambda' = \mathbf{p}_I^T \mathbf{Q} \mathbf{p}_I , \quad (5.15)$$

qui a une forme quadratique, où \mathbf{Q} est une matrice carrée positive définie, $\dim(\mathbf{Q}) = (M + 3) \times (M + 3)$, qui est le résultat de l'intégration analytique et aussi des transformations linéaires basées sur la relation (5.13) et dont les éléments ne dépend que de $\Delta\lambda'$.

La troisième contrainte, qui caractérise la variance ou la norme du résiduel et exprime aussi la fidélité par rapport aux données de mesure, a été utilisée fréquemment dans les différentes méthodes de reconstitution. Elle a été utilisée comme un critère de convergence pour les méthodes de reconstitution itératives [57]. Elle peut être décrite sous la forme d'une inégalité, en supposant qu'un estimé *a priori* $\check{\sigma}_\eta^2$ de la variance σ_η^2 est accessible:

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H} \mathbf{p}_I\|_{L^2}^2 \leq (N + 1) \check{\sigma}_\eta^2 . \quad (5.16)$$

Généralement, la norme du résiduel devrait être approximativement égale à la variance du bruit. L'inégalité dans (5.16) est une condition moins rigoureuse. Elle peut être justifiée par le fait que si une solution \mathbf{p}_I n'est pas dans l'ensemble de solutions définie par (5.16), sa projection se trouve sur la limite de cette ensemble [39]. Une solution sur la limite satisfait approximativement la contrainte par égalité.

Dans les analyses spectrométriques, le spectre d'absorption est toujours positive. L'incorporation d'une contrainte de positivité dans la classe des solutions admissibles jouera un rôle très important dans le cas où le mesurande possède des valeurs proches de zéro. En introduisant la contrainte:

$$\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p}) \geq 0 \quad \text{pour } \lambda' \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]. \quad (5.17)$$

nous pouvons améliorer l'exactitude des résultats de reconstitution $\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})$ et par la suite la résolution des données spectrométriques. Cependant, elle rend l'algorithme de reconstitution non linéaire. Afin de simplifier cette contrainte et la rendre traitable, nous pourrions exiger qu'uniquement les valeurs discrètes de la solution doivent satisfaire la condition (5.17), à savoir:

$$\hat{x}(\lambda'_m; \mathbf{p}) \geq 0 \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (5.18)$$

En utilisant la représentation (5.3), ainsi que la décomposition du vecteur des paramètres \mathbf{p} définie par (5.13), ce système d'inéquations peut être décrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{U} \mathbf{p}_I \geq \mathbf{0}_{M,1}, \quad (5.19)$$

où $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_I - \mathbf{U}_D \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{C}_I)$ est une matrice rectangulaire et creuse, $dim(\mathbf{U}) = M \times (M + 3)$, dont les éléments ne dépendent que de $\Delta\lambda'$.

En se basant sur les contraintes mentionnées ci-haut, nous pouvons définir maintenant une classe d'estimés de mesurandes à partir de laquelle il faut choisir la solution qui minimise l'énergie du mesurande reconstitué. Le problème d'estimation des paramètres \mathbf{p} peut être alors reformulé de façon suivante [60]:

$$\text{minimiser} \quad \|\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})\|_{L^2}^2 = \mathbf{p}_I^T \mathbf{Q} \mathbf{p}_I \quad (5.20)$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H} \mathbf{p}_I\|_{L^2}^2 \leq (N + 1) \sigma_\eta^2 \quad (5.21)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{U} \mathbf{p}_I \geq \mathbf{0}_{M,1}. \quad (5.22)$$

Dans le but d'analyser les performances de l'algorithme de reconstitution sans et avec la contrainte de positivité, les deux méthodes d'estimation des paramètres

suivantes seront utilisées:

$$\text{OPT_SPL} : \quad \hat{\mathbf{p}}_I = \arg_q \inf \left\{ \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \mathbf{q} \mid \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H} \mathbf{q}\|_{L^2}^2 \leq (N+1) \sigma_\eta^2 \right\} \quad (5.23)$$

$$\text{OPT_SPL+} : \quad \hat{\mathbf{p}}_I = \arg_q \inf \left\{ \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \mathbf{q} \mid \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{H} \mathbf{q}\|_{L^2}^2 \leq (N+1) \sigma_\eta^2, \mathbf{U} \mathbf{q} \geq \mathbf{0}_{M,1} \right\} \quad (5.24)$$

Dans les deux cas, le résultat d'estimation obtenu sera utilisé pour déterminer les paramètres dépendants avec la relation (5.13) et le mesurande sera reconstitué à partir de (5.3) et (5.4) .

Le problème d'estimation des paramètres de $\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})$, posé par (5.23), est un problème des moindres carrés sous contrainte qui a été étudié par plusieurs auteurs [76, 77, 78]. Il est considéré ici pour la comparaison par rapport à la deuxième méthode originale OPT_SPL+ (5.24).

La solution de (5.23) peut être donnée explicitement, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\hat{\mathbf{p}}_I = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{y}} , \quad (5.25)$$

pourvu que $\left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} \right)$ est inversible. Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est déterminé de sorte que la condition (5.21) est satisfaite par égalité.

Pour le problème posé par (5.24), l'introduction de la contrainte de positivité rend le problème d'optimisation non quadratique. Dans ce cas, nous ne pouvons pas appliquer directement la méthode des multiplicateurs de Lagrange, et par la suite il sera difficile de trouver une solution sous forme compacte pour estimer les paramètres comme dans le cas précédent. Il faudrait utiliser une méthode de programmation non linéaire avec contraintes qui optimise le critère à minimiser (5.20) pendant qu'elle contrôle de façon continue la violation des contraintes (5.21) et (5.22).

Pour résoudre ce problème non linéaire, nous avons utilisé la procédure “*constr*” (*constrained nonlinear optimization*) du logiciel MATLAB [79]. Cette procédure utilise la méthode de programmation quadratique séquentielle. L'idée de base de cette méthode est de transformer le problème en sous-problème simple qui peut être résolu et utilisé comme base d'un processus itératif. Dans cette méthode, une ap-

proximation de la matrice Hessienne de la fonction Lagrangienne est mise à jour à chaque itération, en utilisant la méthode de Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno. Cette estimation est ensuite utilisée pour générer un sous-problème de programmation quadratique dont la solution sera utilisée pour former une direction de recherche pour la procédure itérative [79].

L'étude de l'algorithme de reconstitution proposé OPT_SPL+, avec des données spectrométriques synthétiques, a montré une amélioration très significative de la qualité de correction par rapport à l'algorithme sans la contrainte de positivité OPT_SPL et même par rapport aux algorithmes de référence utilisés [60]. Cependant, ce que nous avons gagné en exactitude de reconstitution nous l'avons perdu en temps de traitement et de stockage en espace mémoire à cause de la grande quantité de calcul nécessaire pour trouver la solution. En effet, quand le nombre d'échantillons du signal reconstitué M augmente, l'ordre des matrices \mathbf{H} et \mathbf{Q} (presque $(M + 3)$) devient très grand et la recherche de la solution devient rapidement impraticable. En plus, ces matrices ne possèdent pas une forme Toeplitz qui permet de réduire la complexité de calcul par l'utilisation de la transformée de Fourier discrète. Même l'utilisation d'une procédure itérative, basée sur la méthode de Van Cittert, pour trouver le vecteur \mathbf{p}_I ne diminue pas le temps de calcul car la convergence de l'algorithme est très lente [80].

Il faudra, donc, trouver une autre façon plus efficace que la recherche des paramètres de $\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})$ par bloc afin de réduire la complexité de calcul. Une alternative pour l'estimation de ces paramètres consiste à les calculer de façon récursive en prenant en compte une coordonnée \tilde{y}_n du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}$ à la fois. Cette approche offre notamment la possibilité d'un traitement en ligne nécessaire pour l'étude des processus réels. De plus, comme les difficultés de la reconstitution proviennent des erreurs de mesure et que ces erreurs sont aléatoires, nous pouvons nous placer dans un cadre stochastique pour analyser le problème. Dans ce cas, cette estimation récursive des paramètres \mathbf{p} peut être vue comme un filtre de Kalman appliqué à un modèle d'état décrivant la variation de ces paramètres. Pour cela, il faut faire l'hypothèse a

priori du caractère markovien des paramètres du spline pour introduire un modèle générateur autoregressif (AR).

5.3.2 Algorithme KAL_SPL

Le modèle des données de mesure décrit par la convolution:

$$y(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(\lambda - \lambda') x(\lambda') d\lambda' , \quad (5.26)$$

peut être représenté dans le domaine des transformées de Laplace par l'équation algébrique:

$$Y(s) = G(s) X(s) , \quad (5.27)$$

où $X(s) = \mathcal{L}\{x(\lambda)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(\lambda)\}$ et $G(s) = \mathcal{L}\{g(\lambda)\}$. Supposons que la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ peut être approximée par une combinaison linéaire de Ld fonctions différentes qui sont des produits de polynômes et de fonctions exponentielles. Dans ce cas, nous pouvons exprimer la fonction $G(s)$ sous la forme d'une fraction rationnelle:

$$G(s) = \frac{N_g(s)}{D_g(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{Ln} n_k s^k}{\sum_{k=0}^{Ld} d_k s^k} \quad (5.28)$$

avec $d_{Ld} = 1$ et $Ld > Ln$ et remplacer l'équation intégrale (5.26) par une équation différentielle linéaire (5.29) à coefficients constantes (n_k, d_k):

$$\sum_{k=0}^{Ld} d_k y^{(k)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{Ln} n_k x^{(k)}(\lambda) \quad (5.29)$$

dont la résolution est bien adaptée au calcul numérique. L'exposant k entre parenthèses indique la dérivée k -ième des fonctions correspondantes par rapport à λ . En introduisant une variable auxiliaire $u(\lambda)$, telle que

$$u(\lambda) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{X(s)}{D_g(s)} \right\} , \quad (5.30)$$

nous pouvons décomposer le modèle (5.29) en deux équations:

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{Ld} d_k u^{(k)}(\lambda) , \quad (5.31)$$

$$y(\lambda) = \sum_{k=0}^{Ln} n_k u^{(k)}(\lambda) , \quad (5.32)$$

et définir le vecteur d'état:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\lambda) &= \left[u^{(0)}(\lambda) \mid u^{(1)}(\lambda) \mid \cdots \mid u^{(Ld-1)}(\lambda) \right]^T \\ \implies \mathbf{u}^{(1)}(\lambda) &= \left[u^{(1)}(\lambda) \mid u^{(2)}(\lambda) \mid \cdots \mid u^{(Ld)}(\lambda) \right]^T.\end{aligned}\quad (5.33)$$

Nous pouvons ainsi remplacer l'équation intégrale par le modèle d'état équivalent suivant:

$$\mathbf{u}^{(1)}(\lambda) = \mathbf{A} \mathbf{u}(\lambda) + \mathbf{b} x(\lambda) \quad (5.34)$$

$$y(\lambda) = \mathbf{c}^T \mathbf{u}(\lambda) \quad (5.35)$$

avec

$$\mathbf{b} = [0 \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \mid 1]^T, \quad \dim(\mathbf{b}) = Ld, \quad (5.36)$$

$$\mathbf{c} = [n_0 \mid n_1 \mid \cdots \mid n_{Ld} \mid 0 \mid \cdots \mid 0]^T, \quad \dim(\mathbf{c}) = Ld \quad (5.37)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & -d_3 & \cdots & -d_{Ld-1} \end{bmatrix}, \quad \dim(\mathbf{A}) = Ld \times Ld \quad (5.38)$$

Comme les données de mesures sont généralement discrètes, il faudra déterminer un modèle d'état discret qui approxime le modèle continu. Il existe plusieurs approches pour la discrétisation, nous distinguons en particulier la discrétisation basée sur la schématisation d'Euler et la discrétisation basée sur la schématisation de Nyström [81].

La discrétisation basée sur la schématisation d'Euler:

$$\mathbf{u}_n^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta\lambda} \quad n = 0, 1, \cdots \quad (5.39)$$

où $\mathbf{u}_n \triangleq \mathbf{u}(\lambda_n)$ et $\Delta\lambda$ est le pas de discrétisation, utilisée en tenant compte du bruit de mesure $\{\eta_n\}$, amène au modèle d'état discret suivant :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{u}_n + \mathbf{r} x_n \quad (5.40)$$

$$\tilde{y}_n = \mathbf{c}^T \mathbf{u}_n + \eta_n \quad (5.41)$$

avec $\Phi = \mathbf{I}_{Ld} + \Delta\lambda \mathbf{A}$, $\mathbf{r} = \Delta\lambda \mathbf{b}$, $x_n \triangleq x(\lambda_n)$ et \mathbf{I}_{Ld} est la matrice identité d'ordre Ld .

La discrétisation basée sur la schématisation de Nyström:

$$\mathbf{u}_n^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta\lambda} \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.42)$$

amène au modèle d'état discret:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \Phi \mathbf{z}_n + \mathbf{r} x_n \quad (5.43)$$

$$\tilde{y}_n = [\mathbf{c} \mid \mathbf{0}_{1,Ld}]^T \mathbf{z}_n + \eta_n \quad (5.44)$$

avec $\mathbf{z}_n = [\mathbf{u}_{n-1} \mid \mathbf{u}_n]^T$ et

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Ld,Ld} & \mathbf{I}_{Ld} \\ \mathbf{I}_{Ld} & 2\Delta\lambda \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = [2\Delta\lambda \mathbf{b} \mid \mathbf{0}_{1,Ld}]^T$$

où $\mathbf{0}_{i,j}$ est la matrice zéro de dimension $i \times j$.

En supposant que la séquence $\{x_n\}$, qui modélise le mesurande, est une réalisation d'un processus aléatoire $\{\xi_n\}$, indépendant du bruit de mesure $\{\eta_n\}$, dont les deux premiers moments sont connus *a priori*, nous pouvons utiliser le filtre de Kalman standard [42] pour l'estimation du vecteur d'état \mathbf{u}_n ou \mathbf{z}_n , supposés eux aussi être des réalisations de deux processus aléatoires. En effet, le filtre de Kalman permet d'obtenir la valeur moyenne d'un estimateur $\hat{\mathbf{u}}_n$ du vecteur \mathbf{u}_n pour lequel la trace de la matrice de covariance d'erreur:

$$[(\hat{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)(\hat{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)^T] \quad (5.45)$$

est minimale. À partir de l'estimé $\hat{\mathbf{u}}_n$, les estimés du mesurande $\{\hat{x}_n\}$ peuvent être déterminés selon la relation (5.31):

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{Ld-1} d_k u_k(\lambda) + u_{Ld-1}^{(1)}(\lambda), \quad (5.46)$$

et avec la discrétisation:

$$\hat{x}_n = \sum_{k=0}^{Ld-1} d_k \hat{u}_{k,n} + \begin{cases} (\hat{u}_{Ld-1,n+1} - \hat{u}_{Ld-1,n}) / \Delta\lambda & \text{pour (5.39)} \\ (\hat{u}_{Ld-1,n+1} - \hat{u}_{Ld-1,n-1}) / 2\Delta\lambda & \text{pour (5.42)} \end{cases} \quad (5.47)$$

En comparaison avec l'algorithme de référence basé sur le filtre de Kalman (§4.2.1), l'apport essentiel de cette nouvelle représentation du modèle d'état discret ((5.40)–(5.41) ou (5.43)– (5.44)) est la réduction de l'ordre du modèle. Nous savons qu'avec l'algorithme de référence la principale limitation dans le calcul de la solution provient des dimensions des vecteurs d'état qui sont de l'ordre du nombre d'échantillons M de la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$. Avec la nouvelle représentation du modèle d'état qui est de dimension minimale, les dimensions des vecteurs d'état ne dépassent pas $2Ld$ au maximum, ce qui est beaucoup plus inférieur à M . De ce fait, la complexité et le temps de calcul vont être réduits et nous pouvons obtenir une mise en oeuvre plus efficace du filtre lorsque le problème de reconstitution est non stationnaire.

Cependant, avec la modélisation proposée nous n'avons pas l'accès direct aux échantillons $\{x_n\}$, nous devons les calculer une fois les estimés de $\hat{\mathbf{u}}_n$ sont disponibles, ce qui rend difficile l'introduction d'une contrainte de positivité dans l'algorithme d'estimation.

De plus, l'algorithme de reconstitution basé sur cette modélisation ainsi que celle de l'algorithme de référence, ne donnent que les estimés du mesurande aux instants d'échantillonnage et ne permettent pas l'évaluation du mesurande continu entre les instants d'échantillonnage. Cela peut engendrer l'augmentation des erreurs de quadratures et influencer sur l'exactitude de la reconstitution. Pour remédier à cela, nous suggérons d'imposer une contrainte supplémentaire sur l'ensemble des solutions admissibles. La contrainte est que la solution recherchée $\hat{x}(\lambda)$ doit être une spline cubique continue avec sa première et deuxième dérivée. Cette contrainte va non seulement nous permettre d'évaluer le mesurande entre les instants d'échantillonnage, mais aussi d'introduire une certaine flexibilité et fidélité à l'opération de reconstitution du mesurande continu $\hat{x}(\lambda)$. En plus, la formulation analytique de cette contrainte amène à la discrétisation du modèle d'état continu.

Soit \mathcal{S}_3 l'ensemble des fonctions splines cubiques qui sont continues avec la deuxième dérivée. À partir de l'équation d'état (5.34), nous pouvons déduire que

$x(\lambda) \in \mathcal{S}_3$ si $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathcal{S}_3$. Dans ce cas, le mesurande reconstitué $\hat{x}(\lambda)$ peut être alors modélisé par une fonction spline cubique [74]:

$$\hat{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^3 p_{n,k} (\lambda - \lambda_n)^k \quad \text{pour } \lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1} \quad (5.48)$$

pour $n = 0, 1, \dots, M - 1$ avec $\mathbf{p} = [p_{0,0}|p_{0,1}|\dots|p_{M-1,3}]^T$, $\dim(\mathbf{p})=4M$. En utilisant les conditions de continuités de $\hat{x}(\lambda)$ et de sa première dérivée $\hat{x}^{(1)}(\lambda)$, nous pouvons exprimer les paramètres du vecteur \mathbf{p} en fonction des échantillons x_n, x_{n+1} et leurs dérivées respectives. Nous obtenons les relations suivantes [73]:

$$p_{n,0} = x_n \quad (5.49)$$

$$p_{n,1} = x_n^{(1)} \quad (5.50)$$

$$p_{n,2} = \frac{1}{\Delta\lambda} \left(\frac{3}{\Delta\lambda} (x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}^{(1)} - 2 x_n^{(1)} \right) \quad (5.51)$$

$$p_{n,3} = \frac{1}{\Delta\lambda^2} \left(-\frac{2}{\Delta\lambda} (x_{n+1} - x_n) + x_{n+1}^{(1)} + x_n^{(1)} \right) \quad (5.52)$$

alors que pour la continuité de la deuxième dérivée $\hat{x}^{(2)}(\lambda)$:

$$3 x_{n+1} - \Delta\lambda x_{n+1}^{(1)} = 3 x_{n-1} + \Delta\lambda x_{n-1}^{(1)} + 4 \Delta\lambda x_n^{(1)} \quad (5.53)$$

pour $n = 0, 1, \dots, M - 1$. En remplaçant les paramètres dans l'équation (5.48) par ces dernières relations, nous obtenons pour $\lambda \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\lambda) = & w_{00}(\lambda - \lambda_n) x_n + w_{01}(\lambda - \lambda_n) x_n^{(1)} + \\ & + w_{10}(\lambda - \lambda_n) x_{n+1} + w_{11}(\lambda - \lambda_n) x_{n+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (5.54)$$

où $w_{00}(\lambda)$, $w_{01}(\lambda)$, $w_{10}(\lambda)$ et $w_{11}(\lambda)$ sont des polynômes d'ordre 3 définis par:

$$w_{00}(\lambda) = \frac{2}{\Delta\lambda^3} \lambda^3 - \frac{3}{\Delta\lambda^2} \lambda^2 + 1 \quad (5.55)$$

$$w_{01}(\lambda) = \frac{1}{\Delta\lambda^2} \lambda^3 - \frac{2}{\Delta\lambda} \lambda^2 + \lambda \quad (5.56)$$

$$w_{10}(\lambda) = -\frac{2}{\Delta\lambda^3} \lambda^3 + \frac{3}{\Delta\lambda^2} \lambda^2 \quad (5.57)$$

$$w_{11}(\lambda) = \frac{1}{\Delta\lambda^2} \lambda^3 - \frac{1}{\Delta\lambda} \lambda^2 \quad (5.58)$$

Nous pouvons remarquer qu'avec cette nouvelle paramétrisation de $\hat{x}(\lambda)$, le problème d'estimation des paramètres du splines revient maintenant à estimer la séquence

$\{x_n\}$ et sa première dérivée $\{x_n^{(1)}\}$, donnant par la suite l'accès directe aux échantillons $\{x_n\}$ en vue de l'introduction d'une contrainte de positivité dans l'algorithme de reconstitution.

Le vecteur d'état $\mathbf{u}(\lambda)$ peut être exprimé de la même manière que $\hat{x}(\lambda)$, à savoir:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(\lambda) = & w_{00}(\lambda - \lambda_n) \mathbf{u}_n + w_{01}(\lambda - \lambda_n) \mathbf{u}_n^{(1)} + \\ & w_{10}(\lambda - \lambda_n) \mathbf{u}_{n+1} + w_{11}(\lambda - \lambda_n) \mathbf{u}_{n+1}^{(1)}\end{aligned}\quad (5.59)$$

À partir de cette nouvelle modélisation, nous pouvons discrétiser le modèle d'état. En effet, l'intégration de la relation (5.34), où $x(\lambda)$ et $\mathbf{u}(\lambda)$ ont été remplacés par $\hat{x}(\lambda)$ et $\hat{\mathbf{u}}(\lambda)$:

$$\hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\lambda) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}(\lambda) + \mathbf{b} \hat{x}(\lambda)\quad (5.60)$$

par rapport à λ dans l'intervalle $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, nous donne:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n = & \mathbf{A} \left(W_{00} \mathbf{u}_n + W_{01} \mathbf{u}_n^{(1)} + W_{01} \mathbf{u}_{n+1} + W_{11} \mathbf{u}_{n+1}^{(1)} \right) + \\ & \mathbf{b} \left(W_{00} x_n + W_{01} x_n^{(1)} + W_{01} x_{n+1} + W_{11} x_{n+1}^{(1)} \right)\end{aligned}\quad (5.61)$$

avec

$$W_{ij} = \int_0^{\Delta\lambda} w_{ij}(\tau) d\tau \quad \text{pour } i, j = 0, 1.\quad (5.62)$$

En remplaçant $\mathbf{u}_n^{(1)}$ par $(\mathbf{A}\mathbf{u}_n + \mathbf{b}x_n)$ et $\mathbf{u}_{n+1}^{(1)}$ par $(\mathbf{A}\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{b}x_{n+1})$, nous obtenons l'équation d'état discrétisée:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{b}_{10} x_{n+1} - \mathbf{b}_{11} x_{n+1}^{(1)} = \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_n + \mathbf{b}_{00} x_n - \mathbf{b}_{01} x_n^{(1)}\quad (5.63)$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{I} - W_{10} \mathbf{A} - W_{11} \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{I} + W_{00} \mathbf{A} + W_{01} \mathbf{A}^2\quad (5.64)$$

$$\mathbf{b}_{00} = W_{01} \mathbf{A} \mathbf{b} + W_{00} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_{01} = W_{01} \mathbf{b}\quad (5.65)$$

$$\mathbf{b}_{10} = W_{11} \mathbf{A} \mathbf{b} + W_{10} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_{11} = W_{11} \mathbf{b}\quad (5.66)$$

De cette manière, nous avons introduit les paramètres des fonctions splines dans l'équation d'état. Si, en plus, nous faisons l'hypothèse que le mesurande peut être

adéquatement généré par un modèle autorégressif piloté par un bruit aléatoire, tel que:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta\lambda \xi_n \quad (5.67)$$

nous pouvons, maintenant, exprimer le modèle d'état discret équivalent. La relation (5.67) est déduite suite à l'hypothèse que le premier dérivé $x_n^{(1)}$ est supposé être une réalisation d'un processus aléatoire $\{\xi_n\}$ dont la moyenne est nulle. Cette hypothèse est bien justifiée dans les applications spectrométriques: en effet, le spectre d'absorption idéal est supposé avoir la forme d'un train de pics (plus ou moins symétrique) séparés, donc la valeur moyenne de leur dérivée est proche de zéro.

Ainsi, en utilisant les équations (5.53), (5.63) et (5.67) nous pouvons déduire, par des manipulations algébriques, le modèle d'état discret suivant [73]:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_n + \mathbf{r} \xi_n \quad (5.68)$$

$$\tilde{y}_n = \mathbf{h}^T \mathbf{z}_n + \eta_n \quad (5.69)$$

avec

$$\mathbf{z}_n = \left[x_{n-1} \mid x_{n-1}^{(1)} \mid x_n \mid x_n^{(1)} \mid \mathbf{u}_n^T \right]^T, \dim(\mathbf{z}_n) = Ld + 4 \quad (5.70)$$

$$\mathbf{h} = \left[0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid \mathbf{c}^T \right]^T, \dim(\mathbf{h}) = Ld + 4 \quad (5.71)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1} \left[\Delta\lambda \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \right]^T, \dim(\mathbf{r}) = Ld + 4 \quad (5.72)$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 3 & \Delta\lambda & 0 & 4\Delta\lambda & 0 \cdots 0 \\ \mathbf{0}_{Ld,1} & \mathbf{0}_{Ld,1} & \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}, \dim(\mathbf{\Phi}) = (Ld + 4) \times (Ld + 4) \quad (5.73)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\Delta\lambda & 0 \cdots 0 \\ \mathbf{0}_{Ld,1} & \mathbf{0}_{Ld,1} & -\mathbf{b}_{10} & -\mathbf{b}_{11} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \dim(\mathbf{F}) = (Ld + 4) \times (Ld + 4) \quad (5.74)$$

Contrairement au modèle d'état basée sur la discrétisation d'Euler ou de Nyström, cette nouvelle modélisation donne l'accès directe aux échantillons discrets $\{x_n\}$ et par conséquent elle rend plus facile l'introduction d'une contrainte de positivité dans l'algorithme d'estimation. De plus, le vecteur d'état \mathbf{z}_n contient maintenant les quatre paramètres $(x_n, x_n^{(1)}, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)})$ nécessaire pour reconstituer le mesurande entre les instants d'échantillonnage. En conséquence, l'estimation de ces paramètres peut se faire maintenant de façon récursive en prenant en compte une coordonnée \tilde{y}_n du vecteur d'observations $\tilde{\mathbf{y}}$ à la fois.

Les suppositions suivantes concernant les séquences $\{\eta_n\}$ et $\{\xi_n\}$ ont été prises:

- η_n sont des réalisations de variables aléatoires $\underline{\eta}_n$ centrées et un estimé *a priori* $\check{\sigma}_\eta^2$ de leur variance σ_η^2 est accessible;
- ξ_n sont des réalisations de variables aléatoires $\underline{\xi}_n$ centrées et un estimé *a priori* $\check{\sigma}_\xi^2$ de leur variance σ_ξ^2 est accessible;
- les variables aléatoires $\underline{\eta}_n$ et $\underline{\xi}_m$ sont non corrélées: $E[\underline{\xi}_n \underline{\eta}_m] = 0 \quad \forall n, m$,
 $E[\underline{\xi}_n \underline{\xi}_m] = \check{\sigma}_\xi^2 \delta_{n,m}$ et $E[\underline{\eta}_n \underline{\eta}_m] = \check{\sigma}_\eta^2 \delta_{n,m}$.

Sous les hypothèses décrites précédemment, nous pouvons construire maintenant un estimateur à variance minimale qui, à partir des observations $\{\tilde{y}_n\}$ et des estimées *a priori* de $\check{\sigma}_\xi^2$ et $\check{\sigma}_\eta^2$, nous permet d'estimer le vecteur d'état \mathbf{z}_n . Cet estimateur peut être mis en oeuvre de façon récursive par le filtre de Kalman discret [67]. En appliquant ce filtre sur notre système décrit par les équations d'état (5.68) et (5.69), l'estimé du vecteur d'état \mathbf{z}_n peut être calculé à partir des équations suivantes:

$$\Sigma_{n+1}^+ = \Phi \Sigma_n \Phi^T + \check{\sigma}_\xi^2 \mathbf{r} \mathbf{r}^T \quad (5.75)$$

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_{n+1}^+ - \Sigma_{n+1}^+ \mathbf{h} \mathbf{h}^T \Sigma_{n+1}^+ (\mathbf{h} \Sigma_{n+1}^+ \mathbf{h}^T + \check{\sigma}_\eta^2)^{-1} \quad (5.76)$$

$$\mathbf{k}_{n+1} = \Sigma_{n+1} \mathbf{h} / \check{\sigma}_\eta^2 \quad (5.77)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{n+1} = \Phi \hat{\mathbf{z}}_n + \mathbf{k}_{n+1} (\tilde{y}_n - \mathbf{h}^T \Phi \hat{\mathbf{z}}_n) \quad (5.78)$$

où Σ_n^+ est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction, Σ_n est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation et \mathbf{k}_n est le vecteur-gain de Kalman. Notons ici

que le choix des conditions initiales est délicat. En effet, un mauvais choix de \mathbf{z}_0 , c'est-à-dire à la limite un vecteur arbitraire, n'est pas catastrophique en ce sens que l'algorithme excité par les données de mesure apportera les corrections nécessaires. Par contre le traitement des mesures n'améliore pas la covariance de l'erreur au fur et à mesure de son traitement. Nous pouvons traduire notre ignorance de Σ_0 en adoptant $\Sigma_0 = \alpha \mathbf{I}_{Ld+4}$ avec $\alpha \rightarrow \infty$ et \mathbf{I}_{Ld+4} est la matrice d'identité d'ordre $Ld + 4$.

À partir de l'estimé du vecteur d'état $\hat{\mathbf{z}}_n$ à chaque itération, nous pouvons reconstituer le mesurande $\hat{x}(\lambda)$ en utilisant la relation (5.54) pour $\lambda \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\lambda) = & w_{00}(\lambda - \lambda_n) \hat{\mathbf{z}}_{n+1}(1) + w_{01}(\lambda - \lambda_n) \hat{\mathbf{z}}_{n+1}(2) + \\ & + w_{10}(\lambda - \lambda_n) \hat{\mathbf{z}}_{n+1}(3) + w_{11}(\lambda - \lambda_n) \hat{\mathbf{z}}_{n+1}(4) \end{aligned} \quad (5.79)$$

pour $n = 0, 1, \dots, N$, où $\hat{\mathbf{z}}_{n+1}(1)$, $\hat{\mathbf{z}}_{n+1}(2)$, $\hat{\mathbf{z}}_{n+1}(3)$ et $\hat{\mathbf{z}}_{n+1}(4)$ sont les quatres premières composantes du vecteur $\hat{\mathbf{z}}_{n+1}$ obtenu à la sortie du filtre de Kalman. De cette manière, les paramètres des fonctions splines sont déterminés de façon récursive et la reconstitution de mesurande peut être alors réalisée en temps réel.

Puisque le modèle d'état est stationnaire, c'est-à-dire que les matrices Φ , \mathbf{r} et \mathbf{h} ne dépendent pas de n , nous pouvons simplifier la méthode du calcul de Σ_n et \mathbf{k}_n . En effet, dans ce cas le filtre de Kalman se comporte comme un filtre stationnaire dont les paramètres peuvent être déterminés selon les formules suivantes [67]:

$$\Sigma_{n+1} = \left[\mathbf{h} \mathbf{h}^T + \left(\Phi \Sigma_n \Phi^T + \beta \mathbf{r} \mathbf{r}^T \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (5.80)$$

$$\Sigma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n \quad (5.81)$$

$$\mathbf{k}_\infty = \Sigma_\infty \mathbf{h} \quad (5.82)$$

où $\beta = \check{\sigma}_\xi^2 / \check{\sigma}_\eta^2$. Le vecteur-gain stationnaire de Kalman \mathbf{k}_∞ peut être ainsi déterminé à l'avance puisqu'il ne dépend pas des données de mesure. En plus, nous n'aurons plus besoin à connaître *a priori* les variances des séquences $\{\eta_n\}$ et $\{\xi_n\}$, nous avons maintenant un seul paramètre libre β à estimer *a priori* pour déterminer \mathbf{k}_∞ . Avec cette approximation, nous aurons à implanter une seule équation pour estimer les paramètres, à savoir:

$$\hat{\mathbf{z}}_{n+1} = \Phi \hat{\mathbf{z}}_n + \mathbf{k}_\infty \left(\tilde{y}_n - \mathbf{h}^T \Phi \hat{\mathbf{z}}_n \right). \quad (5.83)$$

L'exactitude des résultats de reconstitution peuvent être améliorée en introduisant une contrainte de positivité dans l'algorithme d'estimation. En effet, les valeurs négatives des estimées de \hat{x}_n peuvent être tronquées durant chaque itération en imposant la condition suivante:

$$\hat{x}_n \doteq \begin{cases} \hat{x}_n & \text{si } \hat{x}_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{x}_n < 0 \end{cases} \quad (5.84)$$

L'introduction de diverses contraintes déterministes, autre que la contrainte de positivité est possible. En particulier la contrainte du niveau de borne d'amplitudes peut être imposée, ce qui contribue efficacement à l'extrapolation de la largeur de bande.

En comparaison avec l'algorithme OPT_SPL, le principal avantage de l'algorithme KAL_SPL tient dans le très petit nombre d'opérations arithmétiques nécessaire à la reconstitution du mesurande. Cette réduction de complexité devrait entraîner une réduction du temps de calcul. En effet, les dimensions des matrices et vecteurs d'état sont très faibles, constantes et indépendantes du nombre d'échantillons de $\{\tilde{y}_n\}$. Nous pouvons alors employer l'algorithme dans un très grand nombre d'applications là où le nombre d'échantillons à traiter est très grand. L'algorithme OPT_SPL est par contre limité à un nombre d'échantillons faible compte tenu de la grande quantité de calcul nécessaire pour reconstituer le mesurande (par exemple des matrices de dimensions 128×128 dans OPT_SPL sont ramenées à 6×6 dans KAL_SPL pour le cas $Ld = 2$).

Une autre version de l'algorithme KAL_SPL peut être obtenue avec une approximation de $g(\lambda)$ par une combinaison linéaire de Ld fonctions exponentielles décroissantes $exp(-\gamma_k \lambda)$ pour $k = 1, \dots, Ld$. Dans ce cas, l'intégrale de convolution (5.26) peut être exprimée sous la forme (Appendice B):

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= g(\lambda) * x(\lambda) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{Ld} g_k e^{-\gamma_k \lambda} \right) * x(\lambda) = \sum_{k=1}^{Ld} g_k u_k(\lambda) \end{aligned} \quad (5.85)$$

avec $u_k(\lambda) = e^{-\gamma_k \lambda} * x(\lambda)$. En utilisant l'approximation du mesurande par une fonction spline cubique (5.54), nous pouvons exprimer les valeurs discrètes de $u_k(\lambda)$ en

fonction des paramètres du splines. En effet, avec certaines manipulations algébriques nous pouvons déduire l'équation récurrente suivante:

$$u_{k,n+1} = e^{-\gamma_k \Delta \lambda} \left[u_{k,n} + W_{00}(\gamma_k) x_n + W_{01}(\gamma_k) x_n^{(1)} + W_{10}(\gamma_k) x_{n+1} + W_{11}(\gamma_k) x_{n+1}^{(1)} \right] \quad (5.86)$$

avec $u_{k,n} \triangleq u_k(\lambda_n)$ et

$$W_{ij}(\gamma_k) = \int_0^{\Delta \lambda} e^{-\gamma_k \tau} w_{ij}(\tau) d\tau \quad \text{pour } i, j = 0, 1 \quad (5.87)$$

pour $k = 1, \dots, Ld$. En utilisant l'équation du processus générateur $\{\xi_n\}$, nous pouvons exprimer le modèle d'état discret sous une forme condensée semblable à (5.68) et (5.69), et ainsi utiliser le filtre de Kalman pour estimer les paramètres (Appendice B).

5.4 Résultats de l'évaluation des algorithmes

5.4.1 Résultats avec des données synthétiques

Pour illustrer les algorithmes proposés, nous avons utilisé un exemple de signaux spectrométriques synthétiques traités par Crilly [22]. Le mesurande exacte $\overset{\circ}{x}(\lambda)$ est constitué de deux pics séparés d'amplitudes différentes et la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ a la forme d'une gaussioide. Ils sont définis par:

$$\overset{\circ}{x}(\lambda) = 2 \exp\left(-(\lambda - 45)^2/20.25\right) + 6 \exp\left(-(\lambda - 65)^2/20.25\right) \quad (5.88)$$

et

$$g(\lambda) = 0.0525 \exp\left(-(\lambda - 64)^2/128\right) . \quad (5.89)$$

Les données de mesure sont générées par les relations:

$$\overset{\circ}{y}(\lambda) = \overset{\circ}{x}(\lambda) * g(\lambda) , \quad (5.90)$$

$$\tilde{y}_n = \overset{\circ}{y}(\lambda_n) + \eta_n \quad n = 0, 1, \dots, N - 1; \lambda_n = n \Delta \lambda , \quad (5.91)$$

où $\{\eta_n\}$ est une séquence de nombres pseudo-aléatoires ayant une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ_η^2 .

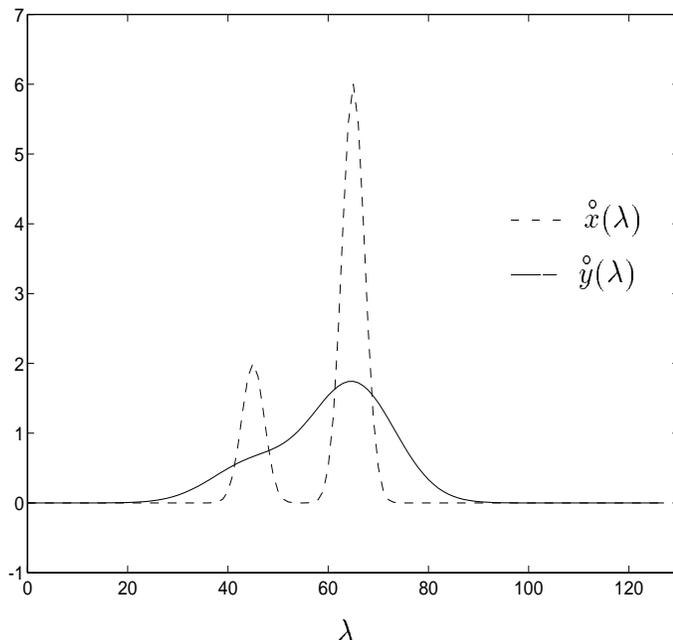


Figure 5.1: Les signaux spectrométriques synthétiques, $N = 128$ et $\Delta\lambda = 1$

Les signaux $\hat{x}(\lambda)$ et $\hat{y}(\lambda)$ sont représentés à la figure 5.1. Nous pouvons remarquer que le mesurande $\hat{x}(\lambda)$, qui possède un spectre de fréquence large bande, est fortement dégradé par le système linéaire caractérisé par $g(\lambda)$. Ce dernier représente un filtre passe-bas qui atténue les fréquences supérieures à la fréquence de coupure, ce qui explique le recouvrement des deux pics dans le résultat de mesure. La résolution des données est médiocre.

Algorithmes OPT_SPL et OPT_SPL+:

Les figures 5.2 – 5.4 représentent les résultats de reconstitution du mesurande $\hat{x}(\lambda)$ à partir des données synthétiques (5.91) obtenus en utilisant les algorithmes OPT_SPL (sans contrainte de positivité) et OPT_SPL+ (avec contrainte de positivité) pour différentes valeurs de la variance du bruit σ_η^2 .

Ces différents résultats de reconstitution montrent que l'introduction de la contrainte de positivité améliore de façon très significative la qualité des données de type spectrométrique: la position, la largeur ainsi que l'amplitude des pics sont recon-

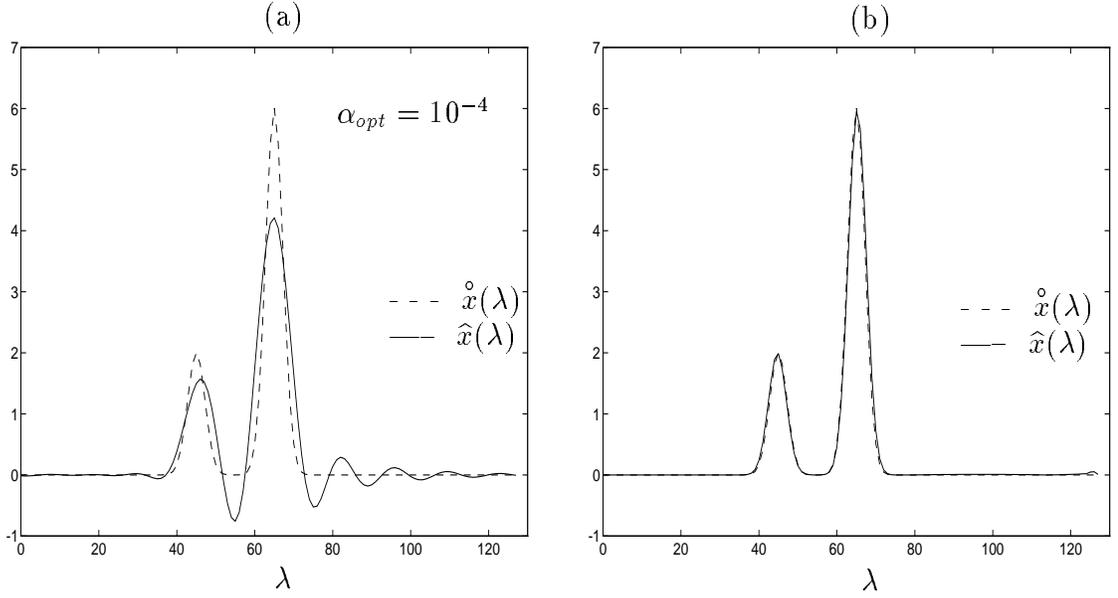


Figure 5.2: Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL (a) et l'algorithme OPT_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 1, \Delta\lambda' = N/M \Delta\lambda$ et $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 0$.

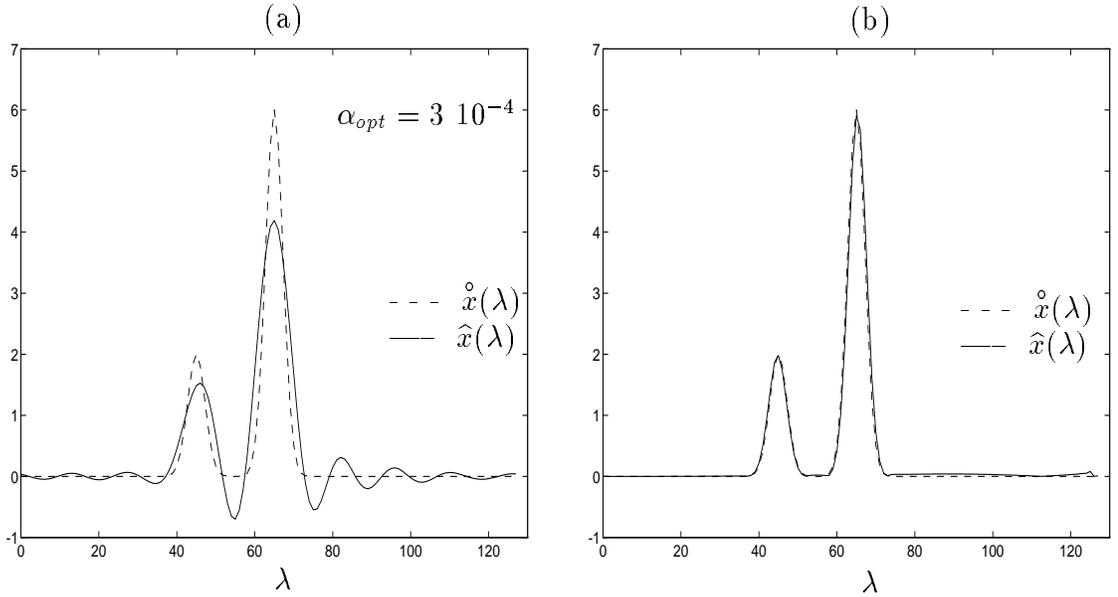


Figure 5.3: Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL (a) et l'algorithme OPT_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 1, \Delta\lambda' = N/M \Delta\lambda$ et $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-6}$.

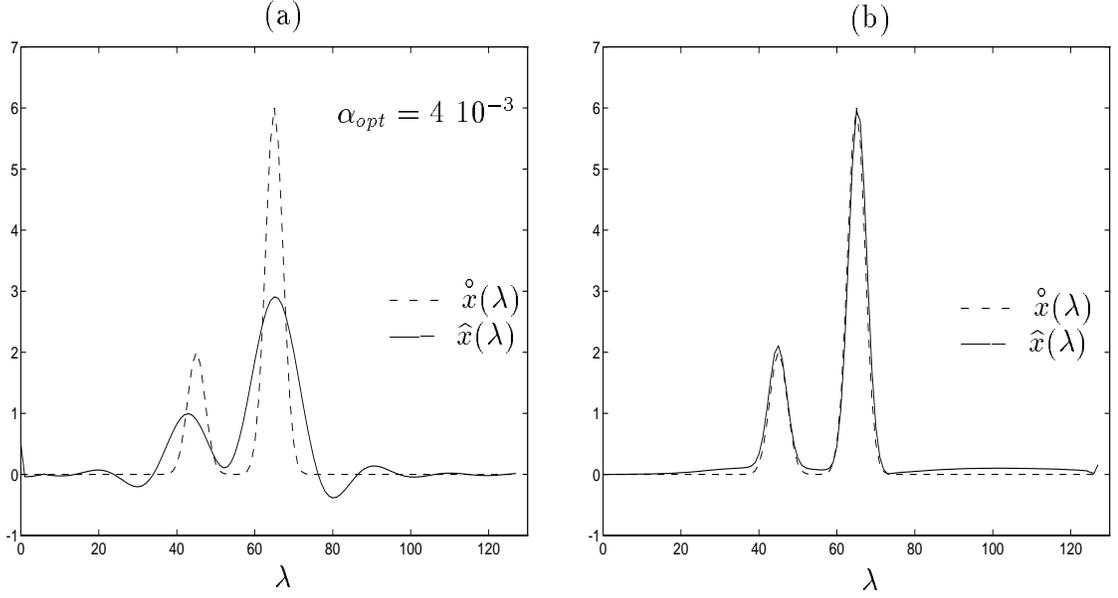


Figure 5.4: Résultats de reconstitution obtenus avec l’algorithme OPT_SPL (a) et l’algorithme OPT_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 1$, $\Delta\lambda' = N/M \Delta\lambda$ et $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-4}$.

σ_η^2	SNR (dB)	OPT_SPL		OPT_SPL+	
		ε_r	ρ_a (dB)	ε_r	ρ_a (dB)
0	∞	0.3562	3.13	0.0796	9.64
10^{-6}	54.8	0.3573	3.11	0.0922	9.00
10^{-5}	44.8	0.5042	1.62	0.1116	8.17
10^{-4}	34.8	0.5649	1.12	0.1245	7.69

Tableau 5.1: Erreur de reconstitution ε_r et rapport signal–bruit amélioré ρ_a pour les algorithmes OPT_SPL et OPT_SPL+ obtenus pour différents σ_η^2 .

stituées de façon très précise. Alors, une amélioration de la résolution de l'analyse spectrométrique peut être atteinte.

Le tableau 5.1 donne les valeurs de l'erreur de reconstitution ε_r , définie par (4.64), et le rapport signal-bruit amélioré ρ_a , défini par (4.65), pour les différents niveaux de bruit utilisés. Nous pouvons remarquer que l'exactitude de reconstitution des données spectrométriques, en présence du bruit, a été améliorée d'un facteur de 5 avec l'introduction de la contrainte de positivité.

Algorithmes KAL_SPL et KAL_SPL+:

L'algorithme KAL_SPL est basé sur l'approximation de la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ par une combinaison linéaire de Ld fonctions exponentielles décroissantes:

$$\hat{g}(\lambda) = \sum_{k=1}^{Ld} g_k e^{-\gamma_k \lambda} \quad (5.92)$$

avec $\gamma_k > 0$ ($k = 1, \dots, Ld$) et différentes. La fonction $g(\lambda)$ définie par (5.89) est une gaussioïde parfaite et centrée. L'approximation d'une telle fonction avec des fonctions exponentielles décroissantes est pratiquement impossible. Pour surmonter ce problème, nous approximations $g(\lambda)$ par la fonction suivante:

$$\hat{g}(\lambda) = g^-(\lambda) * g^+(\lambda) \quad (5.93)$$

avec

$$g^-(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{Ld} g_k e^{\gamma_k \lambda} & \text{pour } \lambda < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.94)$$

$$g^+(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{Ld} g_k e^{-\gamma_k \lambda} & \text{pour } \lambda > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.95)$$

et effectuons la reconstitution du mesurande en deux étapes. En premier temps, nous utilisons l'algorithme KAL_SPL avec la fonction $g^-(\lambda)$ qui fournira un résultat de reconstitution. Ensuite, nous inversons l'ordre du résultat obtenu et effectuons de nouveau la reconstitution par l'algorithme KAL_SPL avec la fonction $g^+(\lambda)$ pour obtenir le résultat final de reconstitution. Comme les coefficients g_k et γ_k ($k =$

$1, \dots, Ld$) sont identiques pour les deux fonctions $g^-(\lambda)$ et $g^+(\lambda)$, le vecteur gain de Kalman \mathbf{k}_n reste aussi identique durant les deux étapes de reconstitution.

Pour la fonction $g(\lambda)$ donnée par l'équation (5.89), l'approximation a été faite avec $Ld = 6$; l'erreur quadratique moyenne de cette approximation est $9 \cdot 10^{-5}$.

Les figures 5.5 – 5.7 représentent les résultats de reconstitution du mesurande $\overset{\circ}{x}(\lambda)$ à partir des données synthétiques (5.91) obtenus en utilisant les algorithmes KAL_SPL (sans contrainte de positivité) et KAL_SPL+ (avec contrainte de positivité) pour différentes valeurs du variance σ_η^2 .

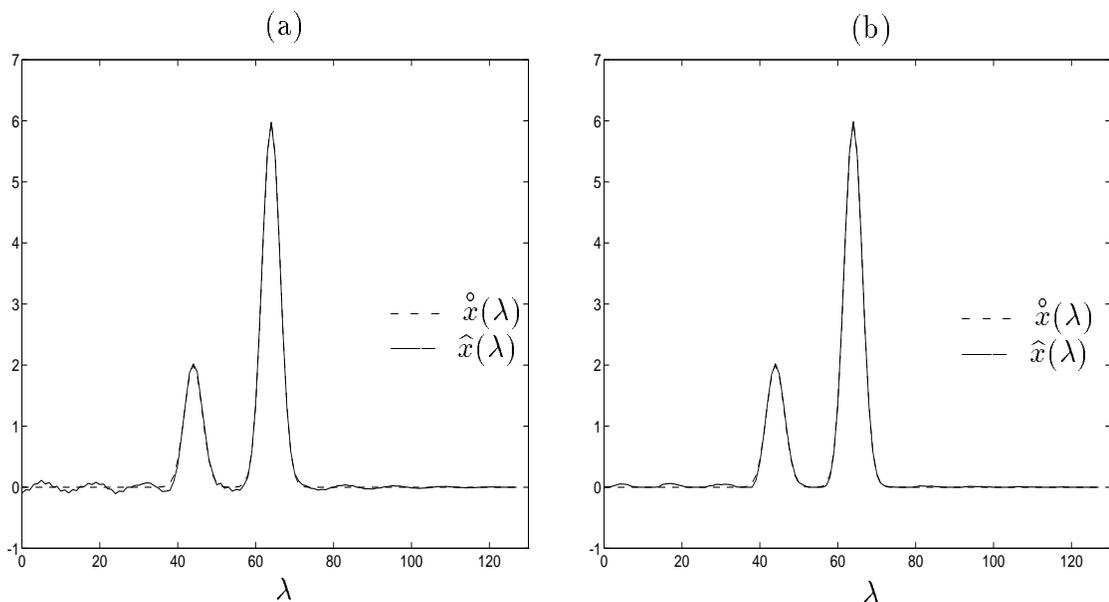


Figure 5.5: Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $\Delta\lambda = 1$, $\check{\sigma}_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = 0$.

En présence du bruit, nous remarquons l'apparition d'artéfacts dans le résultat de reconstitution. Cela est due à l'absence d'une contrainte de lissage dans l'algorithme et surtout à la contrainte dure de positivité qui annule les échantillons négatifs durant chaque itération.

Le tableau 5.2 donne les valeurs de l'erreur de reconstitution ε_r , les valeurs du rapport signal-bruit amélioré ρ_a et les valeurs optimales du paramètre libre $\beta = \check{\sigma}_\xi^2 / \check{\sigma}_\eta^2$ pour les différents niveaux de bruit utilisés. L'exactitude de la reconstitution

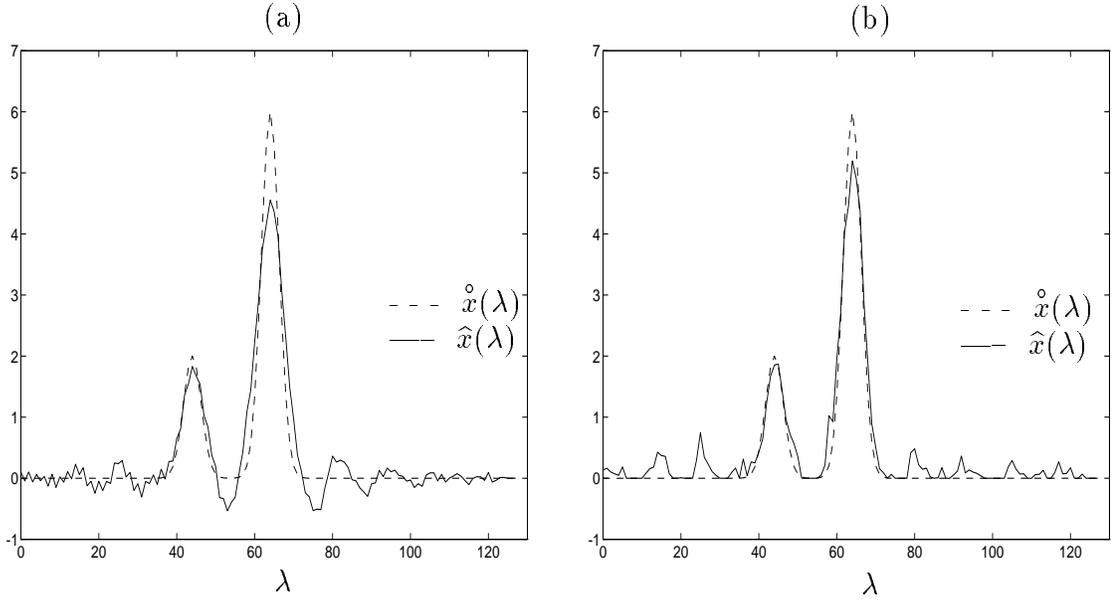


Figure 5.6: Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $\Delta\lambda = 1$, $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-6}$.

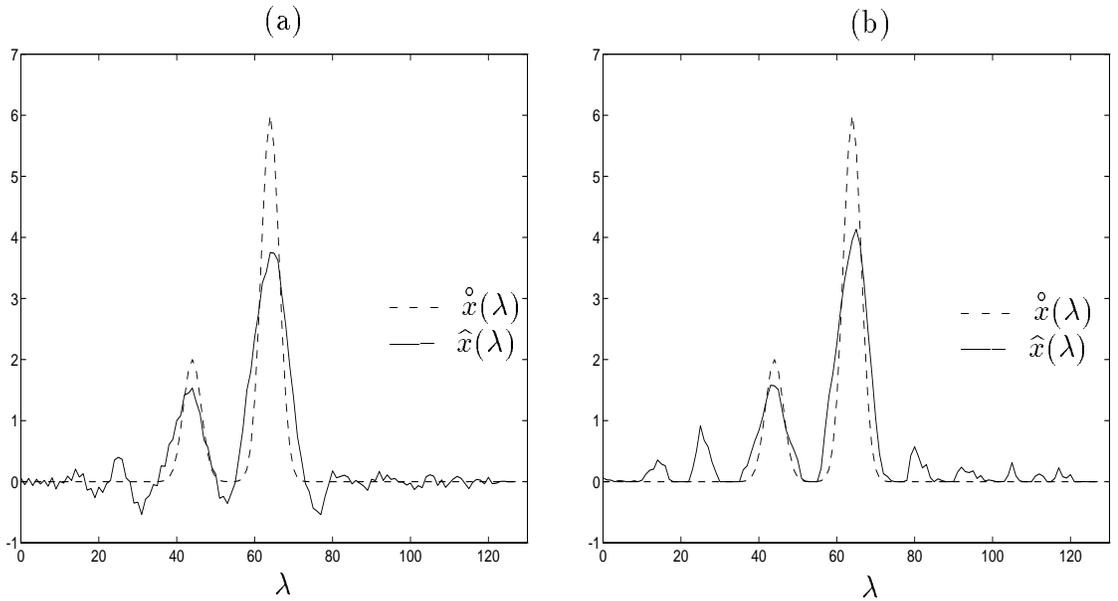


Figure 5.7: Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données synthétiques; $N = 128$, $\Delta\lambda = 1$, $\check{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 = 10^{-4}$.

σ_η^2	SNR (dB)	KAL_SPL			KAL_SPL+		
		ε_r	ρ_a (dB)	β_{opt}	ε_r	ρ_a (dB)	β_{opt}
0	∞	0.0368	12.92	$2.3 \cdot 10^6$	0.0208	15.39	$1.5 \cdot 10^6$
10^{-6}	54.8	0.2932	3.91	$2.0 \cdot 10^4$	0.2049	5.47	$6.0 \cdot 10^4$
10^{-5}	44.8	0.3730	2.87	$4.0 \cdot 10^3$	0.2983	3.83	$1.4 \cdot 10^4$
10^{-4}	34.8	0.4138	2.41	$2.0 \cdot 10^3$	0.3780	2.81	$3.1 \cdot 10^3$

Tableau 5.2: Erreur de reconstitution ε_r , rapport signal-bruit amélioré ρ_a et β_{opt} pour les algorithmes KAL_SPL et KAL_SPL+ obtenus pour différents σ_η^2 .

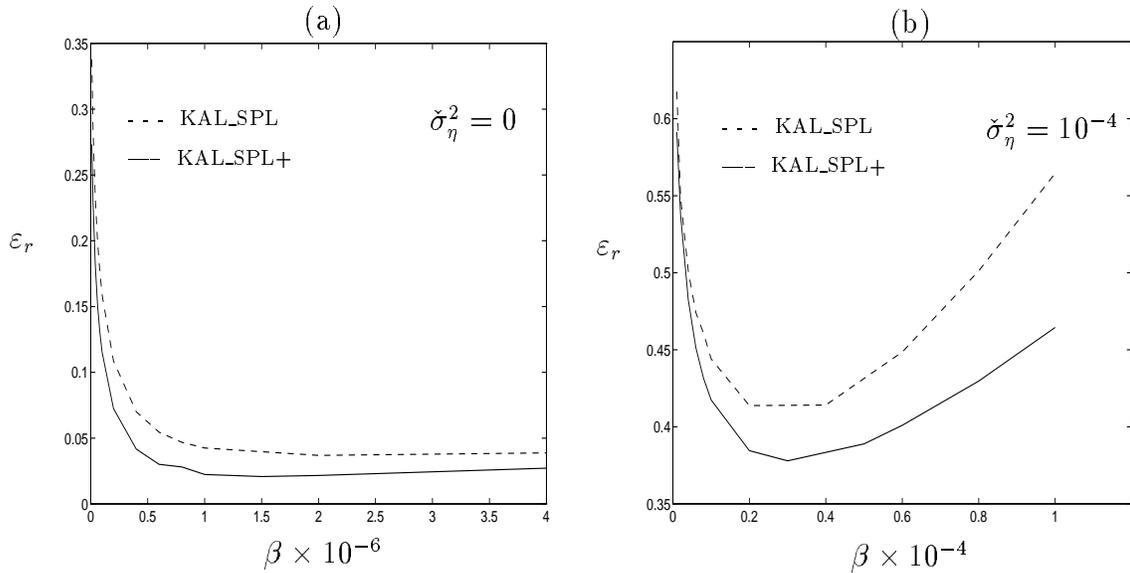


Figure 5.8: Variation de l'erreur de reconstitution ε_r en fonction du paramètre β (a) $\check{\sigma}_\eta^2 = 0$ (b) $\check{\sigma}_\eta^2 = 10^{-4}$

depend du choix du paramètre β . La figure 5.8 représente la variation de l'erreur de reconstitution ε_r en fonction de ce paramètre. Nous pouvons remarquer que l'erreur de reconstitution est beaucoup plus sensible à la sous-estimation de β qu'à son sur-estimation.

5.4.2 Résultats obtenus pour des données réelles

Nous avons testé les algorithmes proposés avec des données spectrométriques réelles prélevées à l'aide du spectromètre MILTON-ROY Spectronic 3000 Array. Ces données de mesure (Figure 5.9.(a)) représentent un mélange de deux solutions d'acétone de substances S1 et S2 appartenant au groupe de merocyanines. La réponse impulsionnelle du spectromètre $g(\lambda)$ (Figure 5.9.(b)) a été identifiée expérimentalement avec des données de références. Les résultats de reconstitution obtenus avec les algorithmes proposés sont présentés à la figure 5.10.

D'autres résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme KAL_SPL+ sont présentés à la figure 5.11 [82]. Les données de mesure utilisées pour leur obtention étaient prélevées par le chromatographe Dionex Ionic Chromatographic System (series 4500I) dans une laboratoire environnementale dans le but d'analyser les constituants d'une substance polluante composite. Comme nous pouvons remarquer, la résolution de l'analyse basée sur ces données n'est pas suffisante pour déterminer de façon exacte les constituants du substance. Les résultats de reconstitution obtenus ont montré l'existence d'autres constituants qui n'étaient pas visible sur les données de mesure.

Dans la figure 5.12.(a)–(b), nous reprenons l'exemple traité au chapitre 2, où nous avons prélevé le spectre de la lumière synthétisée par deux lasers pour différentes résolutions du spectromètre ANRITSU MV02 Serie ($r = 2 \text{ nm}, 5 \text{ nm}$). La réponse impulsionnelle $g(\lambda)$, identifiée expérimentalement, pour chaque résolution est présenté à la figure 5.12.(c)–(d).

Pour ce type de spectromètre, la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ mesurée possède

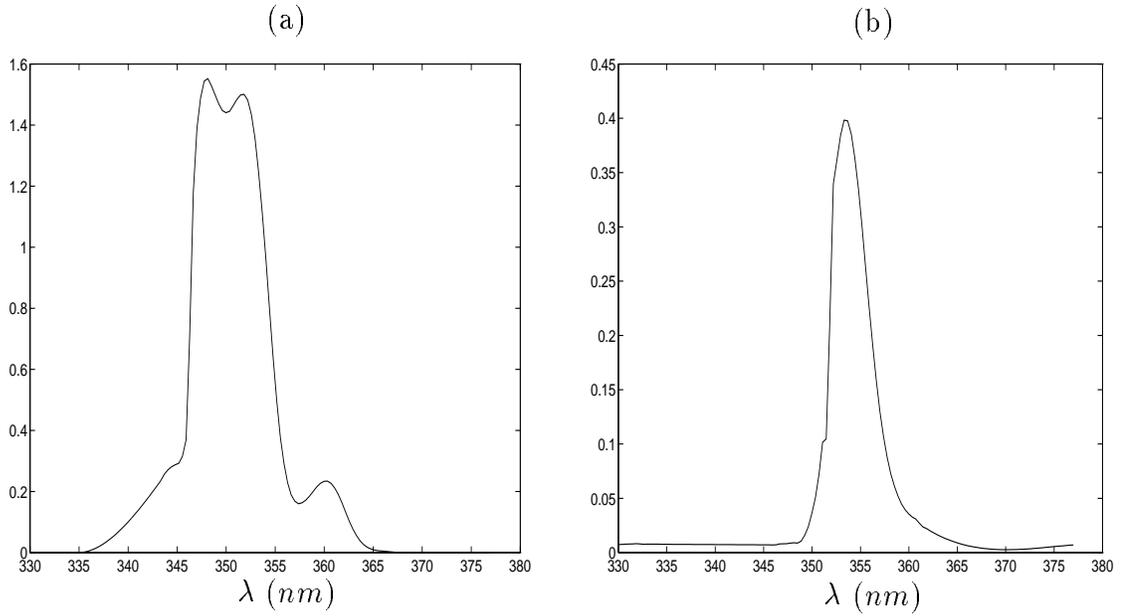


Figure 5.9: Données spectrométriques réelles obtenus avec le spectromètre MILTON-ROY Spectronic 3000 Array; $N = 128$, $\Delta\lambda = 0.37$ (a) résultats de mesure $\tilde{y}(\lambda)$ (b) réponse impulsionnelle du spectromètre $g(\lambda)$.

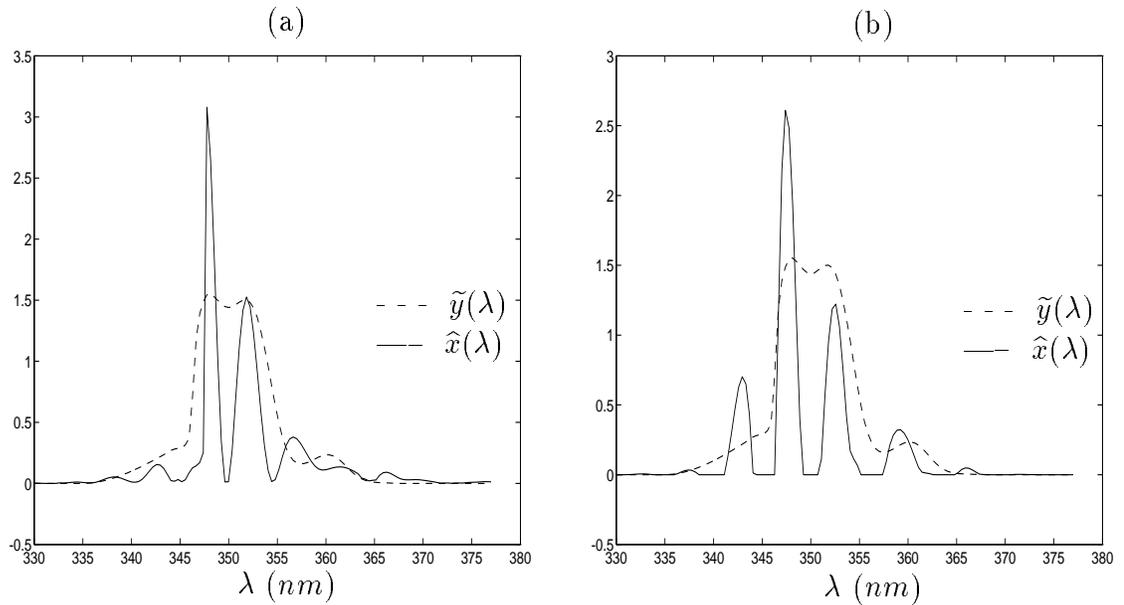


Figure 5.10: Résultats de reconstitution obtenus avec l'algorithme OPT_SPL+ (a) et l'algorithme KAL_SPL+ (b) pour les données réelles; $N = 128$, $M = 125$, $\Delta\lambda = 0.37$, $\Delta\lambda' = 0.379$.

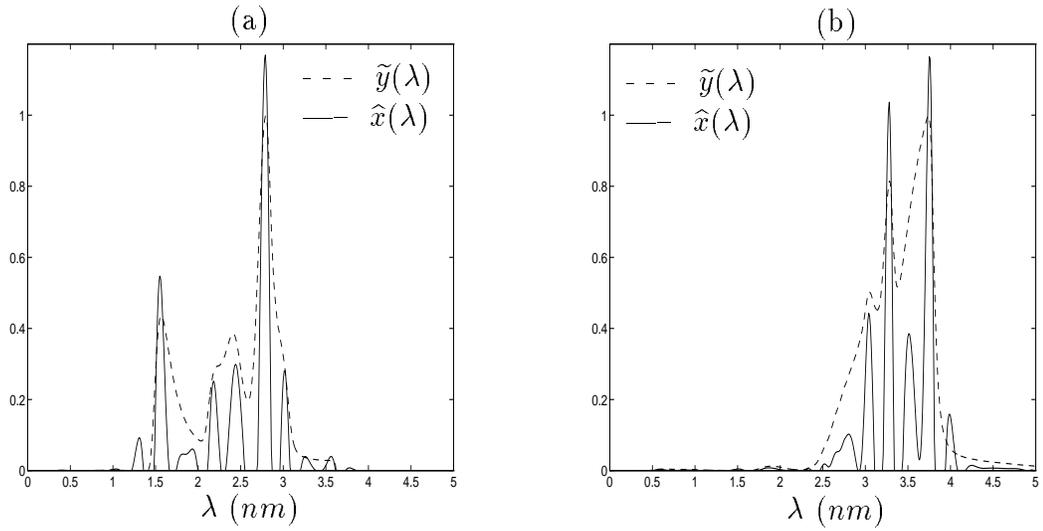


Figure 5.11: Résultats de reconstitution pour les données réelles obtenus avec l'algorithme KAL_SPL+; (a) $N = 512$, $\Delta\lambda = .01$, $\beta_{opt} = 9 \cdot 10^3$ (b) $N = 512$, $\Delta\lambda = .01$, $\beta_{opt} = 10^4$

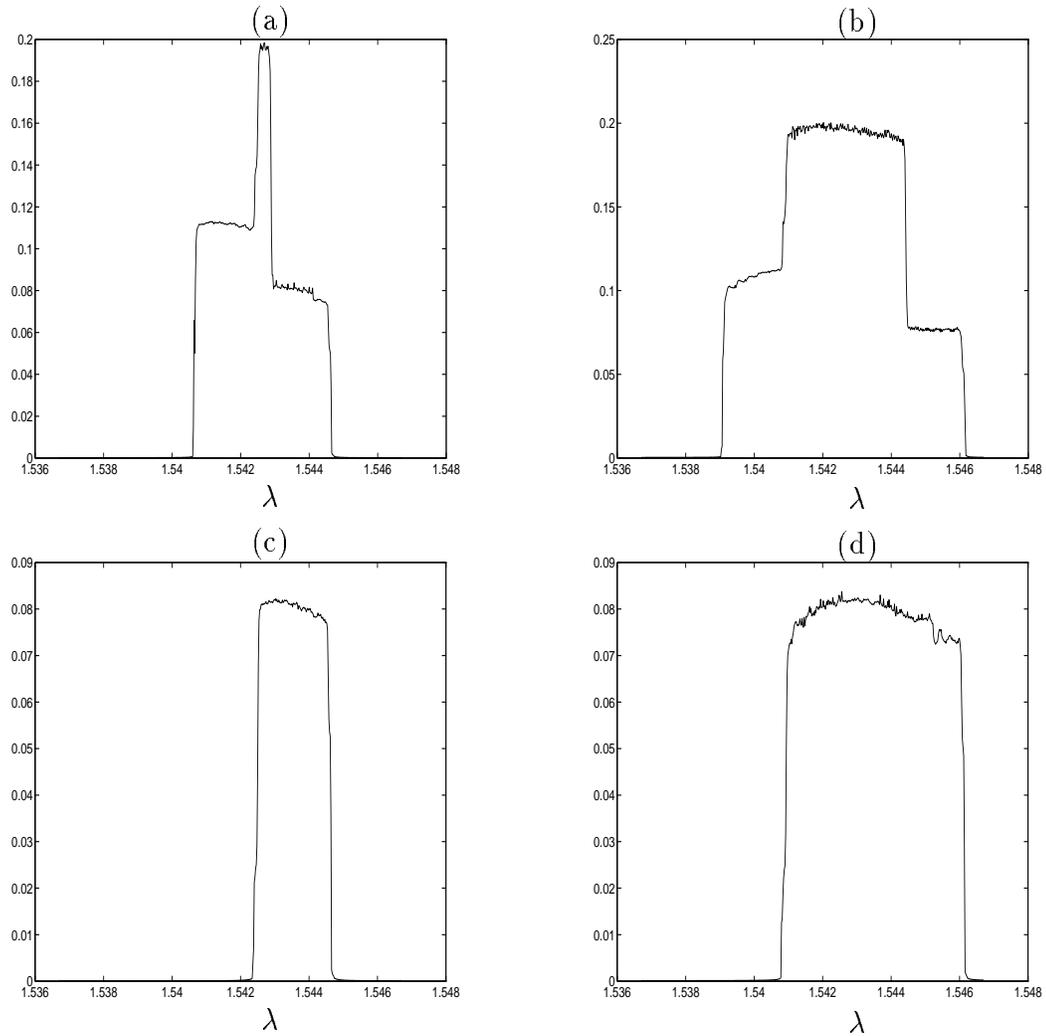


Figure 5.12: Spectre de la lumière synthétisée par deux lasers mesuré avec le spectromètre ANRITSU MV02 Serie (a) $r = 2 \text{ nm}$ et (b) $r = 5 \text{ nm}$; $g(\lambda)$ identifiée expérimentalement (c) $r = 2 \text{ nm}$ et (d) $r = 5 \text{ nm}$.

une forme quasi-rectangulaire. Pour reconstituer le spectre original, une version modifiée de l'algorithme KAL_SPL, qui tient compte de cette forme bien particulière, a été utilisée. Dans cette version, la fonction $g(\lambda)$ est approximée par la somme d'une fonction rectangulaire $g_1(\lambda)$ et d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles:

$$\hat{g}(\lambda) = g_1(\lambda) + \sum_{k=1}^{Ld} g_k e^{-\gamma_k \lambda} \quad \text{avec } \gamma_k > 0$$

La figure 5.13 donne les résultats de reconstitution du spectre original pour les deux résolutions 2 et 5 nm; le spectre en pointillé représente le résultat expérimental obtenu avec la résolution 0.1 nm. Nous pouvons voir que les résultats de reconstitution obtenus sont très proche de la référence utilisée (la résolution $r = 0.1 \text{ nm}$) d'où une amélioration de la résolution de l'analyse spectrométrique.

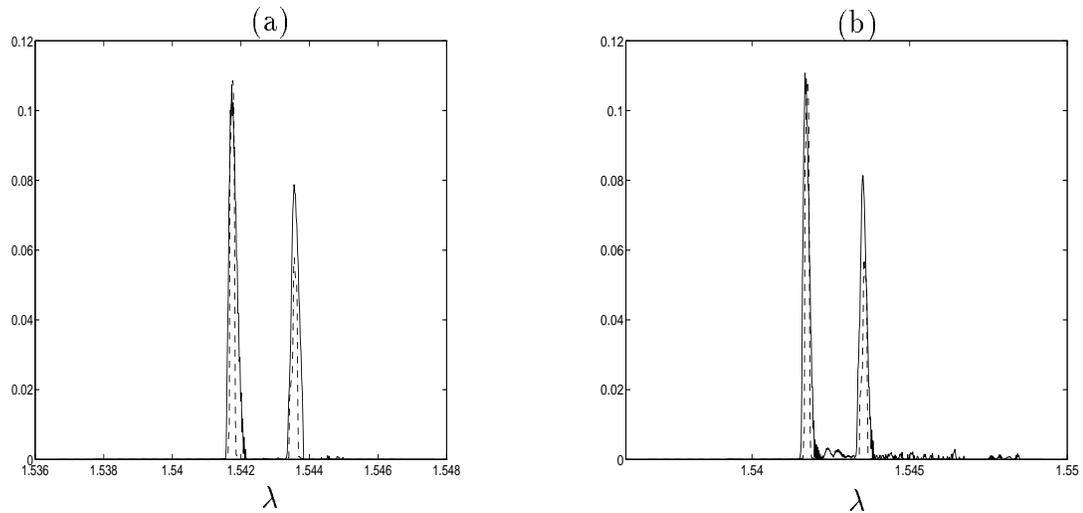


Figure 5.13: Résultats de reconstitution obtenus avec KAL_SPL+ modifié pour les données acquises avec la résolution (a) $r = 2 \text{ nm}$ et (b) $r = 5 \text{ nm}$.

Tous ces résultats de reconstitution obtenus pour les données réelles mettent en évidence l'apport de l'opération de reconstitution dans l'amélioration de la résolution des spectromètres sans avoir dépenser des coûts supplémentaires.

5.5 Comparaison des algorithmes proposés avec les algorithmes de référence

Dans ce paragraphe nous présentons une comparaison quantitative des performances des algorithmes proposés avec les algorithmes de référence exposés dans le chapitre 4 (§ 4.2.1). Ces algorithmes de référence sont les plus utilisés pour la correction des données spectrométriques. La comparaison se fera en termes d'exactitude de reconstitution et de complexité de calcul.

Le tableau 5.3 donne pour chaque algorithme, avec les données synthétiques, les valeurs de l'erreur de reconstitution relative ε_r définie par (4.64) pour les différents niveaux de bruits σ_η^2 utilisés; $N = 128$ et $\Delta\lambda = 1$.

Algorithme	ε_r			
	$\sigma_\eta^2 = 0$	$\sigma_\eta^2 = 10^{-6}$	$\sigma_\eta^2 = 10^{-5}$	$\sigma_\eta^2 = 10^{-4}$
OPT_SPL+	0.0796	0.0922	0.1116	0.1245
SPL_KAL+	0.0208	0.2049	0.2983	0.3780
Tikhonov	0.0921	0.3984	0.4130	0.5347
Jansson	0.2349	0.2728	0.3747	0.5539
Van Cittert	0.2578	0.3654	0.4002	0.5942
Kalman	0.3223	0.3602	0.3660	0.4195

Tableau 5.3: Comparaison des valeurs de l'erreur de reconstitution ε_r pour les algorithmes proposés et les algorithmes de référence pour les données synthétiques

En terme d'exactitude de reconstitution, les deux algorithmes proposés donnent les meilleurs résultats de reconstitution en comparaison avec les autres algorithmes.

L'algorithme OPT_SPL+, bien qu'il offre la meilleure reconstitution, a l'inconvénient de nécessiter un temps de traitement et de stockage en espace mémoire très importants. Son utilisation sera limitée aux applications où le nombre d'échantillons du mesurande à reconstituer est faible.

L'algorithme KAL_SPL+ donne de bons résultats de reconstitution en comparaison avec les algorithmes de références (une amélioration de l'ordre de 30%). L'apport essentiel de cet algorithme est l'utilisation d'une approximation simple de la réponse impulsionnelle du système de mesure combinée avec l'approximation du mesurande avec les fonctions splines cubiques, ce qui permet de réduire la complexité et par la suite le temps de calcul. En effet, comme la complexité d'un algorithme dépend étroitement du nombre d'opérations arithmétiques requises, nous donnons au tableau 5.4 une comparaison des nombres de multiplications et d'additions pour toute l'opération de reconstitution du mesurande pour KAL_SPL et les algorithmes récursifs. Dans ce tableau, N est le nombre d'échantillons du mesurande, M_g est le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ et k_{iter} est le nombre d'itérations propre à chaque algorithme. Le tableau 5.5 donne le nombre d'opérations arithmétiques pour les signaux synthétiques traités dans le cas où $M_g = N = 128$ et $Ld = 6$. Le nombre d'itération k_{iter} pour les algorithmes de Jansson et de Van Cittert varie (10 à 200) selon le niveau de bruit et la complexité du mesurande.

Algorithme	# Multiplications	# Additions
SPL_KAL+	$(Ld^2 + 10 Ld + 24) N$	$(Ld^2 + 9 Ld + 20) N$
Jansson	$(M_g + 1) N k_{iter}$	$(M_g N + N - M_g + 1) k_{iter}$
Van Cittert	$(M_g + 3) N k_{iter}$	$(M_g N + 3N - M_g + 1) k_{iter}$
Kalman	$2 M_g N$	$2 M_g N$

Tableau 5.4: Comparaison de la complexité de calcul entre KAL_SPL et les algorithmes récursifs de référence

Ces tableaux montrent que pour un nombre d'échantillons (N et M_g) plus grand, l'algorithme KAL_SPL est beaucoup plus rapide et plus exact que les algorithmes de référence. Cette rapidité est due principalement à la réduction du modèle de données qui permet d'avoir des dimensions de matrices et vecteurs d'état constantes et indépendantes du nombre d'échantillons N . Les algorithmes de référence sont, par contre, limités à un nombre d'échantillons faible, compte tenu de la grande quantité de calcul nécessaire pour reconstituer le mesurande. Cependant, l'algorithme

Algorithme	# Multiplications	# Additions
SPL_KAL+	30720	28160
Jansson	16512 k_{iter}	16385 k_{iter}
Van Cittert	16768 k_{iter}	16641 k_{iter}
Kalman	32768	32768

Tableau 5.5: Nombre d'opérations arithmétiques pour KAL_SPL et les algorithmes récurrents de référence

KAL_SPL sera limité pour les applications où la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ peut être approximée de façon adéquate par une combinaison linéaire de fonctions exponentielles. Mais, cela constitue une contrainte d'applicabilité très faible, parce que en utilisant la convolution $g^+(\lambda) * g^-(\lambda)$ nous pouvons modéliser $g(\lambda)$ spectrométrique d'une classe très large.

À la lumière de ces résultats, nous pouvons déduire que l'algorithme KAL_SPL+ offre le meilleur compromis exactitude–temps de calcul. De plus, il permet une reconstitution en temps réel, il peut être donc employé dans les applications où les exigences de rapidité de traitement et d'exactitude sont importantes.

5.6 Appendice

5.6.1 Appendice A: Équation (5.15)

À partir des relations (5.3) et (5.4), nous pouvons écrire l'expression de $\hat{x}(\lambda; \mathbf{p})$ dans l'intervalle $[\lambda_m, \lambda_{m+1}]$:

$$\hat{x}(\lambda; \mathbf{p}) = A_m (\lambda - \lambda_m)^3 + B_m (\lambda - \lambda_m)^2 + C_m (\lambda - \lambda_m) + D_m \quad (5.96)$$

où $A_m = p_{4m+3}$, $B_m = p_{4m+2}$, $C_m = p_{4m+1}$ et $D_m = p_{4m}$ pour $m = 0, 1, \dots, M-1$. En utilisant les équations de continuités (5.8)–(5.10), nous pouvons déduire le système d'équations suivant:

$$D_{m+1} = A_m \Delta \lambda'^3 + B_m \Delta \lambda'^2 + C_m \Delta \lambda' + D_m \quad (5.97)$$

$$C_{m+1} = 3A_m \Delta \lambda'^2 + 2B_m \Delta \lambda' + C_m \quad (5.98)$$

$$B_{m+1} = 3A_m \Delta \lambda' + B_m \quad (5.99)$$

pour $m = 0, 1, \dots, M-2$. Nous avons $4M$ paramètres à déterminer mais seulement $(M+3)$ sont indépendants à cause de $(3M-3)$ équations de continuités. Si nous choisissons les paramètres indépendants le vecteur:

$$\mathbf{p}_I = [B_0 \mid C_0 \mid D_0 \mid A_0 \mid A_1 \mid \dots \mid A_{M-1}]^T \quad (5.100)$$

nous pouvons écrire les équations de continuités sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} B_{m+1} \\ C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega} \begin{pmatrix} B_m \\ C_m \\ D_m \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu} A_m \quad (5.101)$$

avec

$$\boldsymbol{\nu} = [3\Delta \lambda' \mid 3\Delta \lambda'^2 \mid \Delta \lambda'^3]^T$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\Delta \lambda' & 1 & 0 \\ \Delta \lambda'^2 & \Delta \lambda' & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, nous pouvons montrer par induction que:

$$\begin{pmatrix} B_m \\ C_m \\ D_m \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}^m \begin{pmatrix} B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{\Omega}^{m-1-k} \boldsymbol{\nu} A_k \quad (5.102)$$

En conséquence, nous pouvons déduire la relation suivante:

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{\Omega}_m \mathbf{p}_I \quad (5.103)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m &= [A_m \mid B_m \mid C_m \mid D_m]^T \\ \mathbf{\Omega}_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{\Omega}^m & \mathbf{\Omega}^{m-1} \boldsymbol{\nu} & \mathbf{\Omega}^{m-2} \boldsymbol{\nu} & \cdots & \mathbf{\Omega} \boldsymbol{\nu} & \boldsymbol{\nu} & \mathbf{0}_{3,1} & \mathbf{0}_{3,1} & \cdots & \mathbf{0}_{3,1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La norme de $\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})$ dans l'espace \mathbf{L}^2 a la forme:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})\|_{L^2}^2 &= \sum_{m=0}^{M-1} \int_{\lambda'_m}^{\lambda'_{m+1}} P_m^2 (\lambda' - \lambda'_m) d\lambda' \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \int_{\lambda'_m}^{\lambda'_{m+1}} \mathbf{e}_m^T \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda'_m)^3 \\ (\lambda - \lambda'_m)^2 \\ (\lambda - \lambda'_m) \\ 1 \end{pmatrix} [(\lambda - \lambda'_m)^3 | (\lambda - \lambda'_m)^2 | (\lambda - \lambda'_m) | 1] \mathbf{e}_m d\lambda' \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{e}_m^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_m \end{aligned} \quad (5.104)$$

avec

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \Delta \lambda'^7 & \frac{1}{6} \Delta \lambda'^6 & \frac{1}{5} \Delta \lambda'^5 & \frac{1}{4} \Delta \lambda'^4 \\ \frac{1}{6} \Delta \lambda'^6 & \frac{1}{5} \Delta \lambda'^5 & \frac{1}{4} \Delta \lambda'^4 & \frac{1}{3} \Delta \lambda'^3 \\ \frac{1}{5} \Delta \lambda'^5 & \frac{1}{4} \Delta \lambda'^4 & \frac{1}{3} \Delta \lambda'^3 & \frac{1}{2} \Delta \lambda'^2 \\ \frac{1}{4} \Delta \lambda'^4 & \frac{1}{3} \Delta \lambda'^3 & \frac{1}{2} \Delta \lambda'^2 & \Delta \lambda' \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

En remplaçant le vecteur \mathbf{e}_m dans (5.104) par (5.103), nous arrivons à la relation recherchée:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(\lambda'; \mathbf{p})\|_{L^2}^2 &= \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{p}_I^T \mathbf{\Omega}_m^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{\Omega}_m \mathbf{p}_I \\ &= \mathbf{p}_I^T \mathbf{Q} \mathbf{p}_I \end{aligned} \quad (5.106)$$

avec

$$\mathbf{Q} = \sum_{m=0}^{M-1} \Omega_m^T \mathbf{Q}_0 \Omega_m . \quad (5.107)$$

5.6.2 Appendice B: Algorithme KAL_SPL modifié

En utilisant l'approximation de $g(\lambda)$ par une combinaison linéaire de Ld fonctions exponentielles décroissantes, le modèle de données de mesure peut être exprimé sous la forme:

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= g(\lambda) * x(\lambda) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{Ld} g_k e^{-\gamma_k \lambda} \right) * x(\lambda) = \sum_{k=1}^{Ld} g_k u_k(\lambda) \end{aligned} \quad (5.108)$$

avec $u_k(\lambda) = e^{-\gamma_k \lambda} * x(\lambda)$. En utilisant la modélisation de $x(\lambda)$ par les fonctions splines cubiques (Éq. (5.54)), nous pouvons déduire les valeurs discrètes de $u_k(\lambda)$ à partir de la relation suivante:

$$\begin{aligned} u_k(\lambda_n) &= \int_0^{\lambda_n} e^{-\gamma_k(\lambda_n - \lambda)} x(\lambda) d\lambda \\ &= e^{-\gamma_k \lambda_n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}} e^{-\gamma_k \lambda} \left[w_{00}(\lambda - \lambda_m) x_m + w_{01}(\lambda - \lambda_m) x_m^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + w_{10}(\lambda - \lambda_m) x_{m+1} + w_{11}(\lambda - \lambda_m) x_{m+1}^{(1)} \right] d\lambda \\ &= e^{-\gamma_k \lambda_n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\gamma_k \lambda_m} \left[W_{00}(\gamma_k) x_m + W_{01}(\gamma_k) x_m^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. W_{10}(\gamma_k) x_{m+1} + W_{11}(\gamma_k) x_{m+1}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (5.109)$$

avec

$$W_{ij}(\gamma_k) = \int_0^{\Delta\lambda} e^{-\gamma_k \tau} w_{ij}(\tau) d\tau \quad \text{pour } i, j = 0, 1 \quad (5.110)$$

pour $k = 1, \dots, Ld$. Avec certaines manipulations algébriques, nous obtenons l'équation récurrente suivante:

$$\begin{aligned} u_{k,n+1} &= e^{-\gamma_k \Delta\lambda} \left[u_{k,n} + W_{00}(\gamma_k) x_n + W_{01}(\gamma_k) x_n^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. W_{10}(\gamma_k) x_{n+1} + W_{11}(\gamma_k) x_{n+1}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (5.111)$$

avec $u_{k,n} \triangleq u_k(\lambda_n)$. En utilisant l'équation de continuité de la deuxième dérivée des splines cubiques:

$$x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{\Delta\lambda}{3} [x_{n-1}^{(1)} + 4x_n^{(1)} + x_{n+1}^{(1)}] \quad (5.112)$$

ainsi que l'équation du processus générateur $\{\xi_n\}$:

$$x_{n+1}^{(1)} = \xi_n \quad (5.113)$$

nous pouvons déduire l'équation d'état suivante:

$$u_{k,n+1} = e^{-\gamma_k \Delta\lambda} \left[u_{k,n} + W_{10}(\gamma_k) x_{n-1} + \frac{\Delta\lambda}{3} W_{10}(\gamma_k) x_{n-1}^{(1)} + W_{00}(\gamma_k) x_n + \left(W_{01}(\gamma_k) + \frac{4}{3} \Delta\lambda W_{10}(\gamma_k) \right) x_n^{(1)} + \left(\frac{\Delta\lambda}{3} W_{10}(\gamma_k) + W_{11}(\gamma_k) \right) \xi_n \right] \quad (5.114)$$

Le modèle des données, défini par (5.108), ainsi que les équations (5.112), (5.113) et (5.114) nous permettent de déduire le modèle d'état discret suivant:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_n + \mathbf{r} \xi_n \quad (5.115)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_n = \mathbf{h}^T \mathbf{z}_n + \eta_n \quad (5.116)$$

avec

$$\mathbf{z}_n = [x_{n-1} \mid x_{n-1}^{(1)} \mid x_n \mid x_n^{(1)} \mid u_{1,n} \mid \cdots \mid u_{Ld,n}]^T, \quad \dim(\mathbf{z}_n) = Ld + 4$$

$$\mathbf{h} = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid g_1 \mid g_2 \mid \cdots \mid g_{Ld}]^T, \quad \dim(\mathbf{h}) = Ld + 4$$

$$\mathbf{r} = \left[0 \mid 0 \mid \frac{\Delta\lambda}{3} \mid 1 \mid r_5(\gamma_1) \mid \cdots \mid r_{Ld+4}(\gamma_{Ld}) \right]^T, \quad \dim(\mathbf{r}) = Ld + 4$$

$$r_{k+4}(\gamma_k) = e^{-\gamma_k \Delta\lambda} \left(\frac{\Delta\lambda}{3} W_{10}(\gamma_k) + W_{11}(\gamma_k) \right), \quad k = 1, \dots, Ld$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{\Delta\lambda}{3} & 0 & \frac{4}{3} \Delta\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{5,1}(\gamma_1) & \Phi_{5,2}(\gamma_1) & \Phi_{5,3}(\gamma_1) & \Phi_{5,4}(\gamma_1) & e^{-\gamma_1 \Delta\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{Ld+4,1}(\gamma_{Ld}) & \Phi_{Ld+4,2}(\gamma_{Ld}) & \Phi_{Ld+4,3}(\gamma_{Ld}) & \Phi_{Ld+4,4}(\gamma_{Ld}) & 0 & \cdots & e^{-\gamma_{Ld} \Delta\lambda} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi_{k+4,1}(\gamma_k) &= e^{-\gamma_k \Delta \lambda} W_{10}(\gamma_k) \\ \Phi_{k+4,2}(\gamma_k) &= \frac{\Delta \lambda}{3} \Phi_{k+4,1}(\gamma_k) \\ \Phi_{k+4,3}(\gamma_k) &= e^{-\gamma_k \Delta \lambda} W_{00}(\gamma_k) \\ \Phi_{k+4,4}(\gamma_k) &= e^{-\gamma_k \Delta \lambda} \left(W_{01}(\gamma_k) + \frac{4}{3} \Delta \lambda W_{10}(\gamma_k) \right)\end{aligned}$$

pour $k = 1, \dots, Ld$. Ainsi, à partir de ce modèle d'état discret, nous pouvons appliquer le filtre de Kalman pour estimer le vecteur d'état \mathbf{z}_n qui contient les coefficients du splines cubiques pour reconstituer le mesurande.

Avec cette modélisation, nous aurons pas besoin de déterminer les coefficients de la transformée de Laplace de la fonction $g(\lambda)$ ni d'inversion de matrice dans le modèle d'état comme dans le cas avec l'algorithme KAL_SPL.

Chapitre 6

ALGORITHMES DE RECONSTITUTION PROPOSÉS POUR L'APPLICATION EN TÉLÉCOMMUNICATION

6.1 Modèle mathématique des données de mesure pour l'estimation de la disparité

Afin de simplifier la modélisation mathématique du problème, certaines suppositions concernant le système de prise de vues stéréoscopiques (deux caméras) utilisé pour la production des images devraient être imposées. En particulier, nous supposons que les deux caméras sont identiques, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes paramètres, et sont montées de telle façon que la distance entre eux soit fixe et leurs axes optiques soient parallèles. En d'autres termes, les caméras devraient avoir une *géométrie épipolaire*. Chaque point de l'espace 3-D (objet) définit, avec les centres de projection des deux caméras, un plan dit plan épipolaire. L'intersection de ce plan avec chacun des deux plans image définit deux lignes appelés *lignes épipolaires*.

Avec une géométrie épipolaire, les lignes épipolaires sont parallèles aux lignes de balayage des images. Cette considération géométrique permet de réduire la dimension de l'espace de recherche de correspondance de 2 à 1. Dans ce cas, on se limite à la

recherche de correspondant d'un point d'une vue (image gauche) à sa ligne épipolaire associée dans l'autre vue (image droite). Il en résulte ainsi des valeurs de disparité à une dimension. La connaissance de la géométrie épipolaire du système de prise de vues est indispensable pour élaborer les algorithmes d'évaluation de disparité.

Si ces suppositions ne sont pas satisfaites, les deux images produites devraient être préalablement rectifiées (étape de rééchantillonnage et interpolation) de sorte que les lignes épipolaires soient parallèles aux lignes de balayage. Le fait de rectifier les images n'en altère pas la qualité des détails contenus dans les images de façon significative.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, la disparité peut être alors considérée comme un scalaire représentant uniquement le décalage selon l'axe horizontal des pixels dans l'image gauche par rapport à l'image droite.

Ainsi, si nous représentons chaque point d'images par l'intensité de la lumière (luminance) en ce point, la formulation mathématique du modèle des données sur une ligne de balayage sera dans le cas discret:

$$I_g(t_n) = I_d(t_n + x(t_n)) + \eta(t_n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.1)$$

ou

$$I_g(n) = I_d(n + x_n) + \eta(n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.2)$$

où $t_n = n\Delta t$ avec Δt est le pas de discrétisation en temps, I_g et I_d représentent respectivement une ligne de l'image gauche et droite, η est le bruit qui entache les images.

En réalité, d'autres éléments entrent dans ce modèle de mesure, tels que les modèles de distorsions géométriques et photométriques des images, le modèle de la réflectance des surfaces, etc. Mais, les expériences jusqu'à date ont montré que les suppositions faites sur ce modèle de mesure sont raisonnables [32, 83, 84].

6.2 Revue de la littérature

Dans le but de résoudre le problème de correspondance d'une paire d'images stéréo, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. Nous pouvons diviser les algorithmes d'évaluation de disparité en deux catégories principales:

- techniques de mise en correspondance basées sur les intensités (luminance) sur une ligne de l'image [33, 34, 71, 84, 85];
- techniques de mise en correspondance basées sur la présence des primitives des images [68, 83, 86, 87].

Pour la première catégorie, la mise en correspondance se fait soit point–par–point pour les intensités des images sur la même ligne de balayage, soit en utilisant une surface ou un bloc d'une image et cherchant son homologue dans l'autre image (adaptation par bloc).

Parmi les méthodes utilisées pour la correspondance point–par–point, nous retrouvons la technique du gradient [88] basée sur une approche itérative. On commence avec un estimé initial de la disparité et on utilise le gradient de l'intensité à chaque point de l'image droite pour modifier l'estimé de la disparité. Les problèmes relatifs à cette technique sont entraînés par le grand nombre d'itérations nécessaire pour avoir un bon estimé de la disparité et aussi par la nécessité d'avoir une bonne initialisation pour trouver les grandes valeurs de disparité.

Pour la technique d'adaptation par bloc, la méthode d'intercorrélation (ang. *cross-correlation*) [70] est utilisée pour déterminer la correspondance entre des blocs extraits de chacune des images le long de l'épipolaire. Un des inconvénients de cette méthode est la quantité de calcul de l'intercorrélation pour chaque pixel de l'image. Pour surmonter ce problème, on applique l'intercorrélation uniquement dans les régions où l'intensité a une grande variation locale. Les techniques d'adaptation SSD (ang. *Sum of Squared Differences*) [71] et à vraisemblance maximale [34] utilisent le même principe. Dans ces techniques, on calcule la variance de la différence d'intensités

dans une fenêtre appliquée sur les pixels qui vont être comparés. La valeur optimale de la disparité est celle qui donne la variance minimale. Le choix de la largeur de la fenêtre représente un compromis entre l'exactitude et la stabilité du résultat d'estimation de la disparité [71].

Nous retrouvons aussi dans cette catégorie les méthodes basées sur une approche variationnelle utilisant le concept de la régularisation [32]. March [33, 89] et Yokoya [90] ont développé une approche de régularisation en minimisant une fonctionnelle de l'énergie qui comporte une contrainte de continuité contrôlée [69] due à la présence des régions occluses dans les images stéréoscopiques.

Pour la deuxième catégorie, des primitives telles que les contours [83], arcs de courbe [86, 87], segments et jonctions [68] sont utilisées comme caractéristiques d'images pour la mise en correspondance. Cette approche consiste à extraire un certain nombre de primitives dans chacune des images puis à tenter de les appairer entre elles. Les algorithmes de cette catégorie sont meilleurs que l'autre catégorie en terme de complexité de calcul, mais possèdent certaines limitations à cause de l'instabilité des caractéristiques.

Marr–Poggio–Grimson [91] ont introduit un algorithme d'adaptation basé sur les contours. Le processus d'adaptation est exécuté sur plusieurs canaux utilisant la stratégie hiérarchique "grossière-à-fine". Dans cette stratégie, les caractéristiques grossières sont adaptés en premier et les résultats obtenus seront utilisés pour adapter les caractéristiques fines. L'inconvénient majeur de cet algorithme est que la correspondance pour chaque canal se fait localement et aussi la continuité de la disparité le long des passages par zéro des pixels n'est pas considérée. Ohta et Kanade [83] ont amélioré cet algorithme en effectuant l'adaptation globale sur les inter-lignes de balayage afin d'exploiter la continuité du contour. Ils ont utilisé la technique de programmation dynamique (algorithme de Viterbi). Cependant, cette technique nécessite une forte quantité de calcul.

6.3 Choix des méthodes de reconstitution

Le problème dans la vision stéréoscopique est d'arriver à réaliser la mise en correspondance de la manière à la fois exacte et rapide. Nous avons choisi de résoudre ce problème au niveau des intensités sur une ligne (luminance) et cela en utilisant la technique d'adaptation par bloc. L'étude des algorithmes d'estimation de la disparité proposés dans la littérature et qui utilisent ce principe, nous a permis de constater les points suivants:

- La détermination de la disparité nécessite l'interpolation de valeurs d'intensités situées entre les pixels de l'image, ainsi que le gradient pour chaque pixel. Pratiquement, cette opération prend plus que la moitié du temps nécessaire pour avoir un estimé de la disparité; d'où une grande quantité de calcul avec aussi la possibilité d'avoir des erreurs introduites par l'opération d'interpolation (valeurs approximatives).
- Comme les images sont bruitées, le gradient sera aussi bruité et donc il faut lisser (ou filtrer) l'image avant la différentiation.

Pour pallier à ces inconvénients, nous proposons deux algorithmes d'estimation de la disparité. Ils sont basés sur l'introduction d'un filtre auxiliaire dans le modèle de mesure (6.2) dont le gradient peut être déterminé de façon exact parce que nous connaissons son expression analytique.

Le premier algorithme (TIKH_SSD) est basé sur la combinaison de deux approches: variationnelle et itérative. Nous utilisons d'abord l'algorithme de déconvolution de Tikhonov (§4.2.1) pour déterminer le filtre auxiliaire décalé par la disparité recherchée. Ensuite, nous appliquons la technique d'adaptation SSD pour déterminer la disparité à partir du filtre. Cet algorithme sera limité pour des faibles variations de la disparité.

Le deuxième algorithme (DIR_SSD) utilise directement la technique d'adaptation SSD avec le filtre auxiliaire.

L'avantage des algorithmes proposés repose sur le fait qu'ils n'utilisent aucune interpolation ni différentiation de l'image d'où une réduction de la complexité de calcul. En plus, ils sont moins sensibles aux bruits qui affectent les mesures grâce au filtrage effectué par le filtre auxiliaire.

6.4 Description des algorithmes proposés

6.4.1 Algorithme TIKH_SSD

Soit le modèle des données de mesure:

$$I_g(n) = I_d(n + x_n) + \eta(n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.3)$$

où $\eta(n)$ est supposé être une réalisation d'un processus aléatoire gaussien blanc centré et de variance σ_η^2 .

Soit $h(n)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre auxiliaire linéaire et stable de type passe-bas, définie par la formule analytique suivante:

$$h(n) = \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_h^2}\right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (6.4)$$

La dérivée de cette réponse du filtre est donnée par:

$$h^{(1)}(n) = -\frac{n}{\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_h^2}\right). \quad (6.5)$$

En appliquant ce filtre à l'image $I_g(n)$ (6.3), nous aurons:

$$h(n) * I_g(n) = h(n) * I_d(n + x_n) + h(n) * \eta(n) \quad (6.6)$$

où $*$ désigne l'opération de convolution.

Sous l'hypothèse que la variation de la fonction de la disparité $x(n)$ est faible et qu'elle est implicitement constante autour de n , $x_n = x$, nous pouvons transférer la disparité de I_d vers le filtre $h(n)$:

$$I_{gh}(n) = I_d(n) * h(n + x) + \eta_1(n) \quad (6.7)$$

où $I_{gh}(n)$ et $\eta_1(n)$ sont l'image $I_g(n)$ et le bruit $\eta(n)$ filtrés par $h(n)$ respectivement.

Comme le filtre $h(n)$ est linéaire et stable, $\eta_1(n)$ est aussi gaussien et avec certaines contraintes sur les caractéristiques du filtre (largeur de bande et fréquence d'échantillonnage), il peut être modélisé comme un processus gaussien blanc [92].

En posant $h_1(n) = h(n + x)$, le modèle (6.7) sera:

$$I_{gh}(n) = I_d(n) * h_1(n) + \eta_1(n). \quad (6.8)$$

Avec cette transformation du modèle initial, le problème revient maintenant à un problème de reconstitution de mesurande où $h_1(n)$ est la grandeur à reconstituer, $I_d(n)$ joue le rôle de la réponse impulsionnelle et $I_{gh}(n)$ est le résultat de mesure. Ainsi, si nous connaissons $I_{gh}(n)$ et $I_d(n)$ nous pouvons déterminer $h(n + x)$ en utilisant les algorithmes de reconstitution. Ce dernier ainsi que la connaissance de $h(n)$, nous permettra de déterminer la disparité x .

L'algorithme utilisé pour déterminer $h_1(n)$ devrait être exact et simple de point de vue quantité de calcul. Malheureusement, nous ne pouvons pas utiliser les algorithmes de reconstitution proposés dans le chapitre précédent pour différentes raisons. L'algorithme OPT_SPL nécessite une grande quantité de calcul bien qu'il offre une meilleure exactitude de reconstitution. L'algorithme KAL_SPL nécessite l'approximation de la réponse impulsionnelle (ici c'est $I_d(n)$) par une combinaison linéaire de fonctions exponentielles ce qui est pratiquement impossible dans le cas présent.

Pour déterminer $h_1(n)$, nous avons utilisé l'algorithme de reconstitution avec régularisation de Tikhonov (Chapitre 4 §4.2.1) dans le domaine spectral, qui offre un meilleur compromis entre l'exactitude et le temps de calcul. Puisque les données sont discrètes, la grandeur reconstituée est donnée par:

$$\hat{h}_1(n) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F} \{ I_{gh}(n) \} [\mathcal{F} \{ I_d(n) \}]^*}{|\mathcal{F} \{ I_d(n) \}|^2 + \alpha \left(1 + n^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 \right)} \right\} \quad (6.9)$$

où $\mathcal{F}(\cdot)$ est l'opérateur de la transformée de Fourier discrète, α est le paramètre de régularisation et N est le nombre de points d'échantillonnage.

Une fois nous avons déterminé $\hat{h}_1(n)$, nous pouvons utiliser la technique d'adaptation SSD pour estimer la disparité à partir de la relation:

$$\hat{h}_1(n) = h(n + x_n) + \xi(n) \quad (6.10)$$

où $\xi(n)$ représente l'erreur de l'estimation de $h_1(n)$.

Pour estimer la disparité x_n , nous minimisons le critère de correspondance entre les fonctions $\hat{h}_1(n)$ et $h(n + x_n)$, qui a la forme de la somme des différences au carré (SSD) de leurs valeurs dans une fenêtre $[-W/2, W/2]$:

$$J_n[x_n] = \sum_{j=-W/2}^{W/2} [\hat{h}_1(n + j) - h(n + x_n + j)]^2 \quad (6.11)$$

La largeur de la fenêtre appliquée sur $\hat{h}_1(n)$ et $h(n + x)$ est $W+1$. Nous supposons implicitement que la disparité est constante le long de la fenêtre; c'est-à-dire tous les points à l'intérieur de la fenêtre ont été décalés en parallèle.

La minimisation de la relation (6.11) est simplifiée par le fait que nous pouvons supposer qu'un estimé initial \hat{x}_n^0 de x_n est accessible (par exemple \hat{x}_{n-1}). Cela permet d'approximer le critère (6.11) par un critère quadratique en utilisant l'expansion en série de Taylor de $h(n + x_n)$ autour de \hat{x}_n^0 jusqu'au premier ordre:

$$h(n + x_n) = h(n + \hat{x}_n^0) + \Delta x_n h^{(1)}(n + \hat{x}_n^0) \quad (6.12)$$

où $\Delta x_n = x_n - \hat{x}_n^0$ et $h^{(1)}(n + \hat{x}_n^0)$ est la première dérivée de $h(n + x_n)$ par rapport à x pour $x = \hat{x}_n^0$. Le critère à minimiser (6.11) peut être maintenant remplacé par:

$$J_n[\Delta x_n] = \sum_{j=-W/2}^{W/2} [\psi_1(n + j) - \Delta x_n \psi_2(n + j)]^2 \quad (6.13)$$

avec

$$\psi_1(n) = h_1(n) - h(n + \hat{x}_n^0) \quad (6.14)$$

$$\psi_2(n) = h^{(1)}(n + \hat{x}_n^0) \quad (6.15)$$

La minimisation du critère (6.13) produira la correction:

$$\hat{\Delta}x_n = \frac{\sum_{j=-W/2}^{W/2} \psi_1(n + j)\psi_2(n + j)}{\sum_{j=-W/2}^{W/2} (\psi_2(n + j))^2} \quad (6.16)$$

à apporter à l'estimé initial \hat{x}_n^0 :

$$\hat{x}_n^1 = \hat{x}_n^0 + \hat{\Delta}x_n \quad (6.17)$$

Cette correction peut être améliorée en remplaçant \hat{x}_n^0 par \hat{x}_n^1 et en faisant la procédure itérative jusqu'à la convergence de la disparité ou bien jusqu'à un nombre d'itération maximal.

L'incertitude sur l'estimé de la correction de la disparité est exprimée par:

$$\sigma_{\Delta x}^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{\sum_{j=-W/2}^{W/2} (\psi_2(n+j))^2} \quad (6.18)$$

où σ_ξ^2 est un estimé *a priori* de la variance de ξ .

En sachant l'expression analytique de la réponse impulsionnelle du filtre et de sa dérivée, nous pouvons ainsi éviter l'interpolation et la différentiation.

Comme nous avons mentionné précédemment, l'algorithme proposé TIKH_SSD se base sur l'hypothèse que la variation de la disparité est faible pour justifier la relation (6.7) qui transfère la disparité de l'image droite au filtre auxiliaire. Pour une grande variation ou bien présence de discontinuités dans la disparité, cet algorithme peut ne pas donner une bonne estimation. En effet, dans ce cas, nous ne pouvons pas avoir une bonne exactitude de la déconvolution qui est nécessaire pour obtenir une bonne estimation de la disparité.

En présence de discontinuités dans la disparité, la solution obtenue avec l'algorithme de Tikhonov, qui est continue et lisse, ne permet pas de détecter les régions où ses discontinuités ont eu lieu. En conséquence, nous pouvons perdre des détails importants sur les caractéristiques de la disparité en effectuant le transfert au filtre. En effet, les seules informations qui peuvent donner une meilleure connaissance de ses caractéristiques sont les images elles-mêmes.

6.4.2 Algorithme DIR_SSD

L'idée de base de cet algorithme est la même que la précédente en ce qui concerne l'utilisation d'un filtre auxiliaire. Mais, nous utilisons directement la technique

d'adaptation SSD pour estimer la disparité sans recours à la procédure de déconvolution. En plus, nous pouvons appliquer cet algorithme pour des grandes variations de la disparité.

Nous reprenons le modèle de mesure avec le filtre auxiliaire $h(n)$:

$$I_{gh}(n) = I_d(n + x_n) * h(n) + \eta_1(n). \quad (6.19)$$

Soit la fenêtre W appliquée sur les deux termes de (6.19) où nous supposons implicitement que la disparité est constante, $x_n = x$, le long de cette fenêtre. Avec cette hypothèse, nous pouvons déplacer x de l'image droite vers le filtre à l'intérieur de W :

$$I_{gh}(n) = I_d(n) * h(n + x) + \eta_1(n). \quad (6.20)$$

Le critère de correspondance à minimiser est la somme des différences au carrée des intensités des images dans la fenêtre W :

$$J_n[x_n] = \sum_{j=-W/2}^{W/2} [I_{gh}(n + j) - h(n + x_n + j) * I_d(n)]^2. \quad (6.21)$$

En faisant, comme dans le paragraphe précédent, l'expansion en série de Taylor de $h(n + x_n)$ autour de \hat{x}_n^0 , un estimé initial de la disparité, nous trouvons la correction $\hat{\Delta}x_n$ donnée par la relation (6.16), mais avec

$$\psi_1(n) = I_{gh}(n) - h(n + \hat{x}_n^0) * I_d(n) \quad (6.22)$$

$$\psi_2(n) = h^{(1)}(n + \hat{x}_n^0) * I_d(n) \quad (6.23)$$

En comparaison avec l'algorithme TIKH_SSD, les deux images sont maintenant introduites dans la modélisation permettant par la suite de conserver les caractéristiques de la disparité. Les opérations d'interpolation et de différentiation de l'image droite sont maintenant remplacées par une convolution numérique avec le filtre décalé. L'exactitude de ses opérations va être alors améliorée vu que nous connaissons les expressions analytiques de $h(n)$ et $h^{(1)}(n)$.

En plus, d'après (6.22) les deux images seront filtrées avec $h(n)$; cela va permettre de réduire le bruit affectant ses images et va améliorer l'exactitude de l'estimation

de la disparité. L'ajout de ce filtre auxiliaire dans la technique d'adaptation SSD conventionnelle, va rendre la solution d'estimation moins sensible au bruit et par la suite elle sera plus stable.

6.5 Résultats de l'évaluation des algorithmes

6.5.1 Résultats avec des données synthétiques

L'analyse des performances des algorithmes proposés sera essentiellement portée à l'évaluation de leur exactitude et en particulier, la sensibilité de l'erreur relative ε_r de l'estimé de la disparité à la largeur du fenêtré W utilisée.

Pour les données de mesure synthétiques, tous les résultats de simulations présentés dans ce paragraphe, ont été effectués sur une ligne de balayage d'une image réelle quelconque (cas 1-D).

La simulation des données de mesure a été faite selon la méthodologie suivante:

- la fonction $I_d(n)$ montrée à la figure 6.1.(a) est choisie comme l'intensité de la lumière de chaque pixel d'une ligne prise à partir d'une image réelle quelconque;
- une fonction de disparité exacte $\hat{x}(n)$ est appliquée à $I_d(n)$ pour obtenir la fonction:

$$I_g(n) = I_d(n + \hat{x}(n)) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Comme la disparité peut prendre des valeurs non entiers, les fonctions splines cubiques ont été utilisées pour l'opération d'interpolation.

- à $I_g(n)$ nous ajoutons une séquence pseudo-aléatoire représentant un bruit blanc gaussien caractérisé par le rapport signal-bruit (SNR).

Algorithme TIKH_SSD: Nous avons testé cet algorithme avec trois fonctions de disparité exactes $x(n)$: deux fonctions continues (Figures 6.1.(b) et 6.3.(b)) et dont

la variation est assez faible, et une fonction avec des discontinuités (Figure 6.5.(b)). Les figures 6.1—6.6 représentent pour chaque forme de la disparité $x(n)$: les signaux synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, le résultat de reconstitution du filtre $\hat{h}(n+x)$ avec l'algorithme de Tikhonov avec lequel nous avons déterminé la disparité $\hat{x}(n)$, les résultats d'estimation de $\hat{x}(n)$ et la variation de l'erreur d'estimation ε_r en fonction de la grandeur W de la fenêtre utilisée.

Notons qu'avec cet algorithme, l'exactitude de l'estimation de la disparité repose essentiellement sur une bonne déconvolution (ε_{rec} faible).

Les résultats d'estimation dans le cas où la disparité est continue sont beaucoup meilleurs que ceux dans le cas où elle est discontinue. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'en présence de discontinuité, le filtre auxiliaire décalé par la disparité exacte présente lui aussi des discontinuités, alors que la solution de reconstitution, obtenue avec l'algorithme de Tikhonov, est continue et lisse. L'erreur de reconstitution ε_{rec} va être plus grande et cela va influencer l'exactitude de l'estimation de $x(n)$.

La valeur du paramètre σ_h de $h(n)$ devrait être bien choisie afin d'assurer une bonne exactitude d'estimation. Une valeur faible de σ_h engendre des valeurs de $h(n)$ très proche de zéro et par la suite il y aura présence d'artefacts dans le résultat de reconstitution qui provoqueront des résultats erronés de $\hat{x}(n)$. Il est donc important de choisir un σ_h assez large.

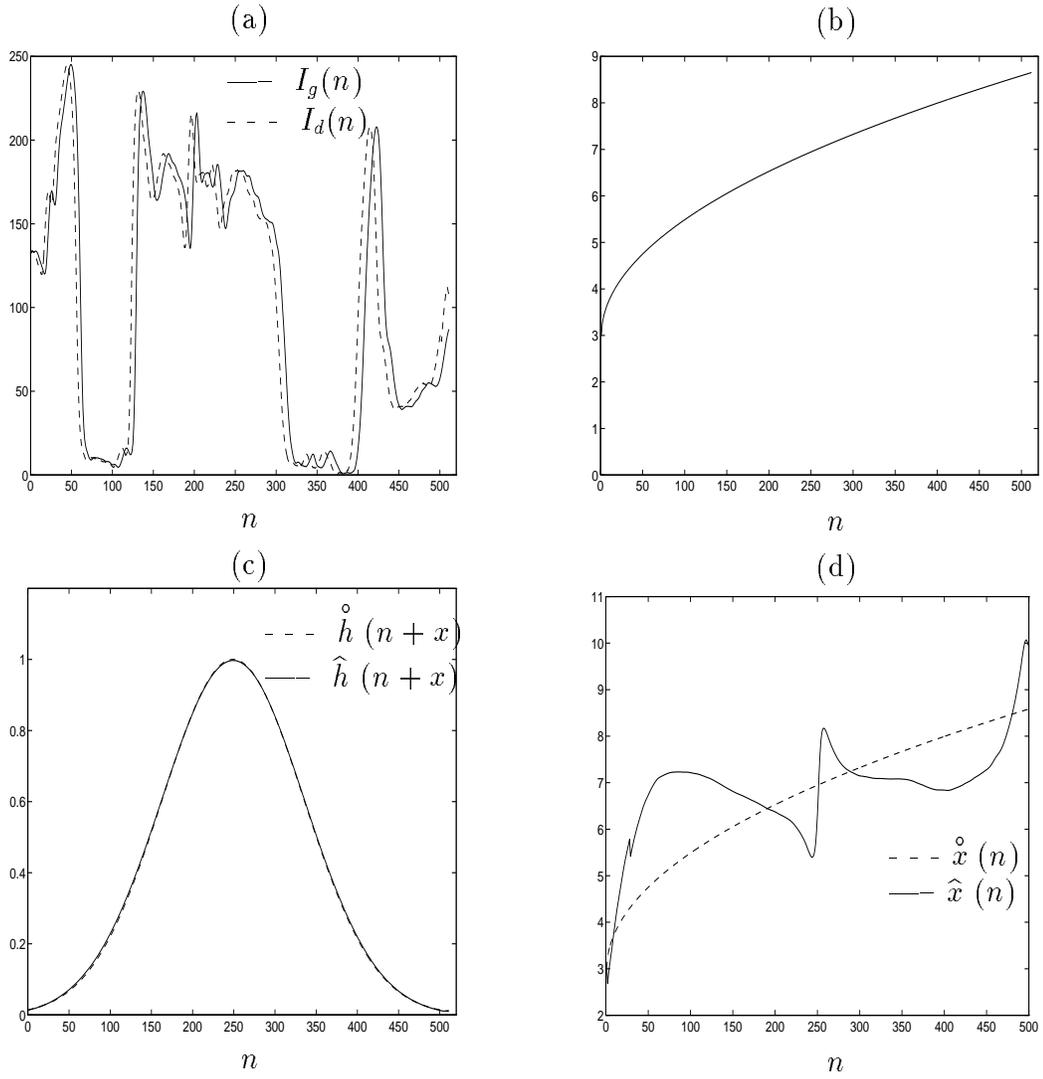


Figure 6.1: Étude de l'algorithme TIKH_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 7.5 \cdot 10^3$ et $SNR = 45 \text{ dB}$ (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat de déconvolution ($\varepsilon_{rec} = 7.2 \cdot 10^{-3}$), (d) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=28$.

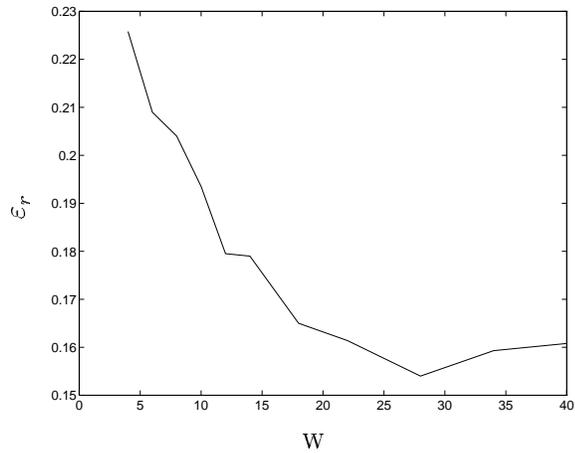


Figure 6.2: Erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur de la fenetre W

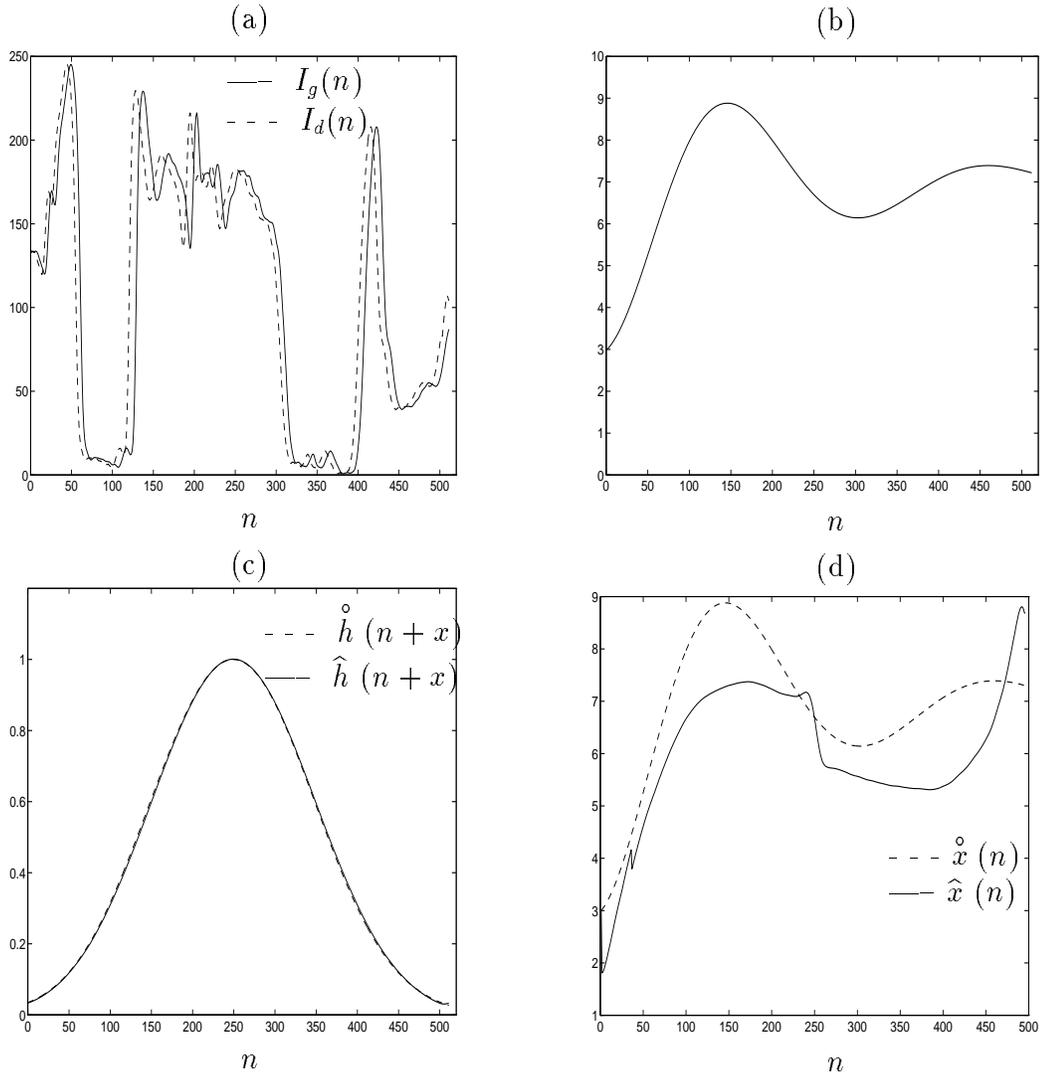


Figure 6.3: Étude de l'algorithme TIKH_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 7.5 \cdot 10^3$ et $SNR = 45 \text{ dB}$ (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat de déconvolution ($\varepsilon_{rec} = 9 \cdot 10^{-3}$), (d) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=36$.

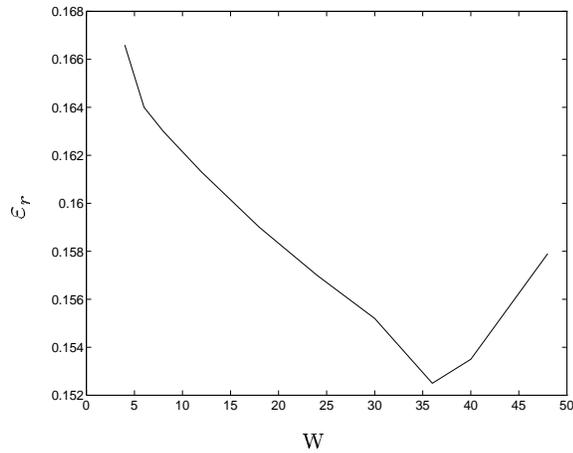


Figure 6.4: Erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur de la fenetre W

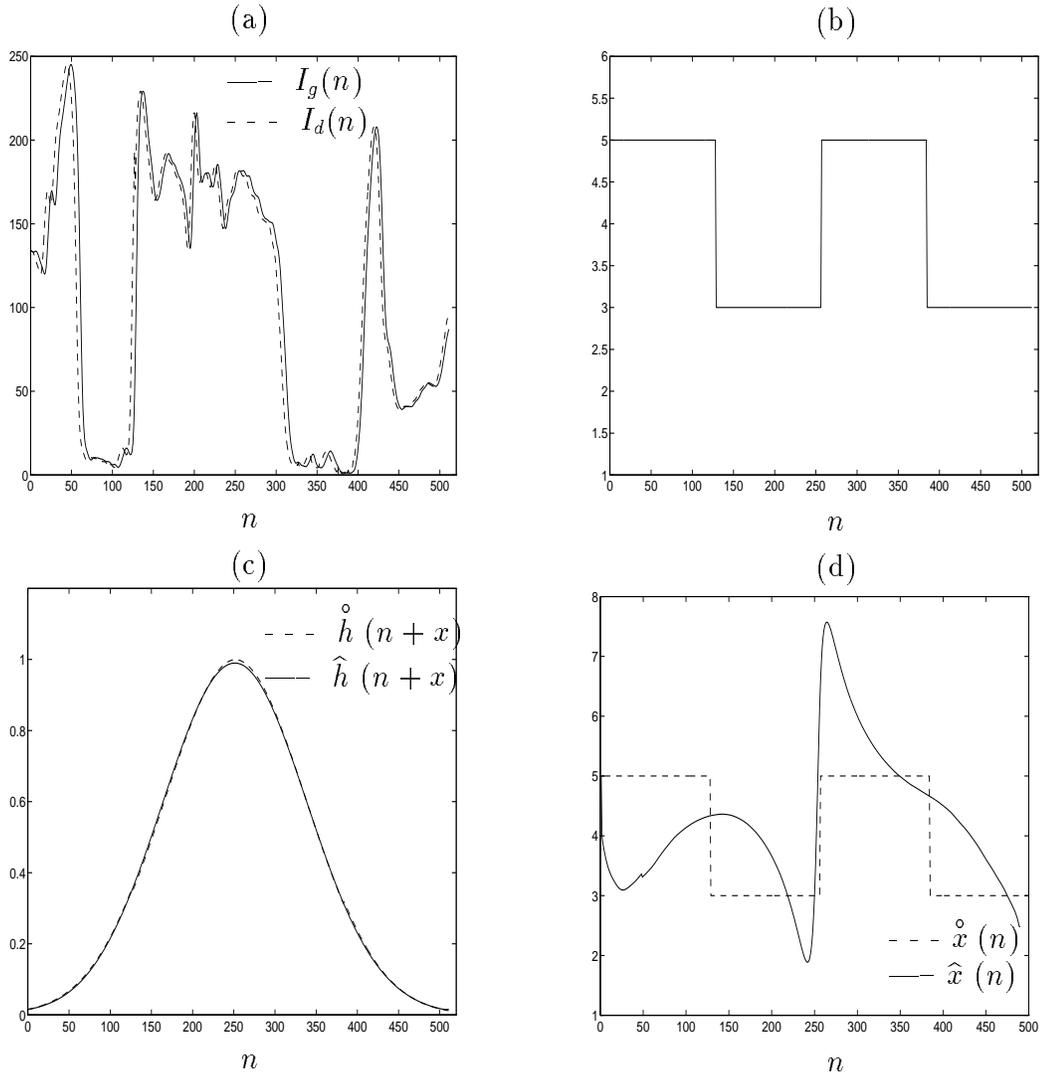


Figure 6.5: Étude de l'algorithme TIKH_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 7.5 \cdot 10^3$ et $SNR = 45 \text{ dB}$ (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat de déconvolution ($\varepsilon_{rec} = 1.8 \cdot 10^{-2}$), (d) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=36$.

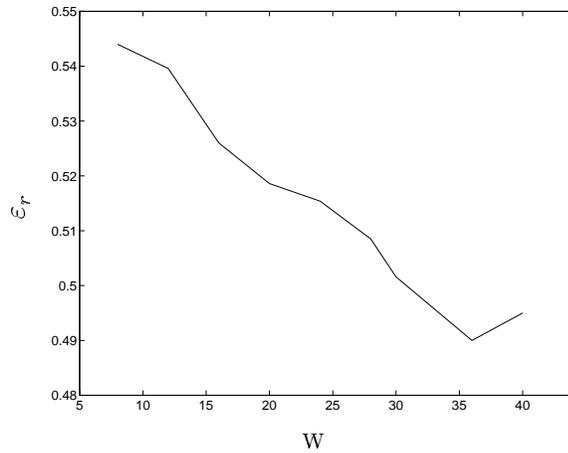


Figure 6.6: Erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur de la fenetre W

Algorithme DIR_SSD: Pour le test de cet algorithme, nous avons utilisé, en plus des deux fonctions de disparité continues montrées aux figures 6.1.(b) et 6.3.(b), deux autres fonctions discontinues avec une variation assez grande. Les figures 6.7—6.10 représentent pour chaque fonction $x(n)$: les signaux synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, les résultats d'estimation de $\hat{x}(n)$ ainsi que la variation de l'erreur d'estimation ε_r en fonction de la largeur W de la fenêtre pour cet algorithme et pour la technique SSD conventionnelle (sans le filtre auxiliaire).

Pour les résultats d'estimation obtenus avec la technique SSD sans le filtre auxiliaire, nous avons utilisé les fonctions splines cubiques pour l'interpolation de $I_d(n+x)$ et de sa dérivée.

Comme nous s'attendions, les résultats d'estimation de la disparité obtenus avec DIR_SSD sont meilleurs que ceux de l'algorithme TIKH_SSD et de l'algorithme SSD conventionnel. Les éléments caractéristiques de la fonction de disparité sont conservées et les régions de ses discontinuités sont détectées de façon précise.

D'après les courbes montrées aux figures 6.7.(d) – 6.10.(d), nous voyons qu'avec l'algorithme DIR_SSD le choix de la largeur W de la fenêtre n'affecte pas beaucoup l'exactitude de l'estimation: la variation de l'erreur ε_r en fonction de W est assez faible. Par contre, pour l'algorithme SSD conventionnel, la solution est très sensible à un choix W : la variation de l'erreur de l'estimé de la disparité est assez grande par rapport à W ; en plus la présence du bruit engendre l'apparition d'artefacts dans la solution. Le filtrage (lissage) dans DIR_SSD diminue les bruits et rend la variation des intensités $I_g(n)$ et $I_d(n)$ à l'intérieur de la fenêtre W suffisamment large par rapport aux bruits, ce qui permet d'avoir une meilleure estimation de $x(n)$.

Contrairement à l'algorithme TIKH_SSD, la valeur du paramètre σ_h de $h(n)$ dans l'algorithme DIR_SSD devrait être assez faible pour obtenir une bonne exactitude d'estimation. Avec une valeur assez grande de σ_h , la largeur de bande du filtre sera étroite, et cela entraînera un sur-lissage des images. En conséquence, nous pouvons perdre des détails importants sur leur variations et sur les caractéristiques de la disparité.

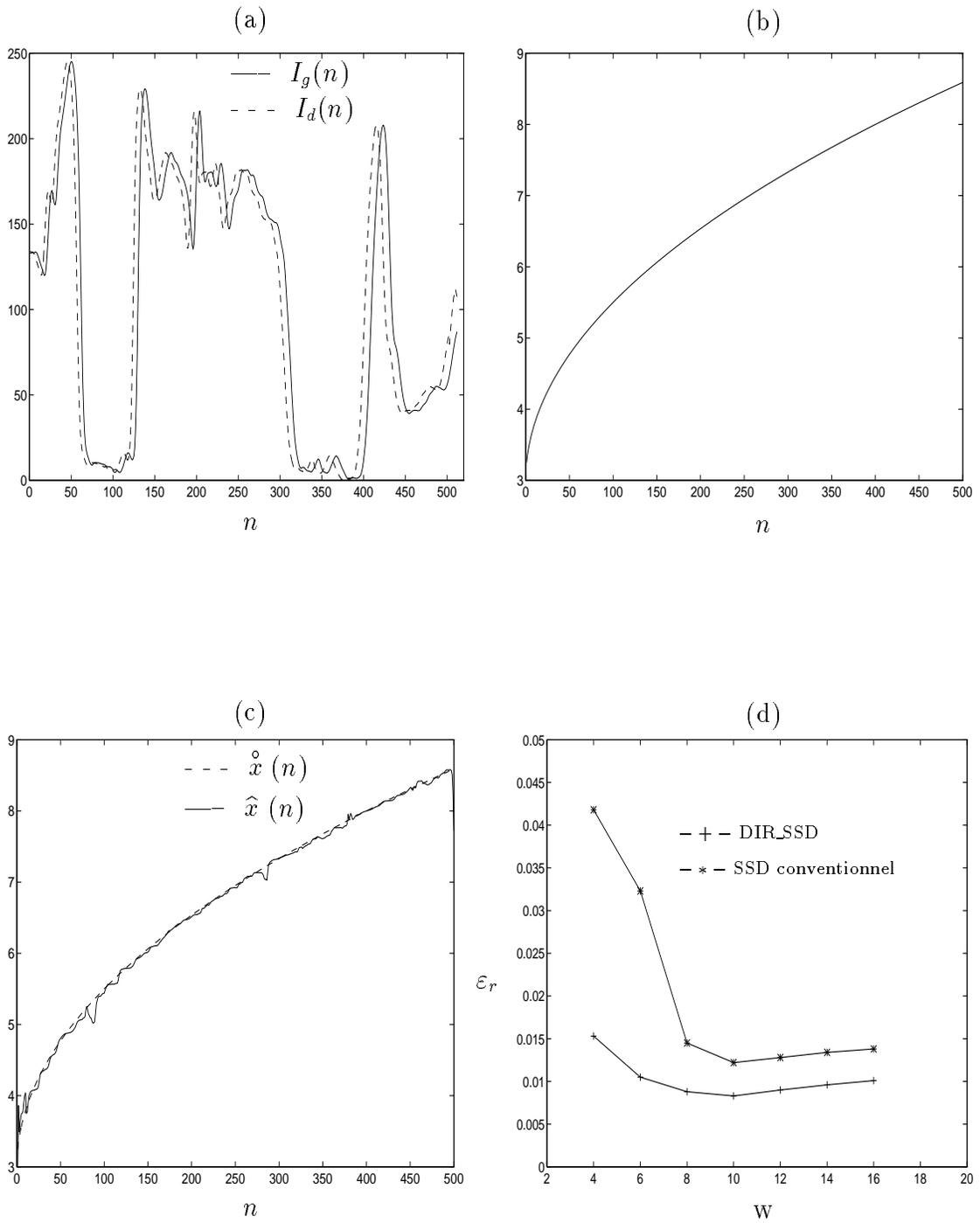


Figure 6.7: Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45 \text{ dB}$: (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=10$, (d) erreur ϵ_r en fonction de la largeur de la fenêtre W .

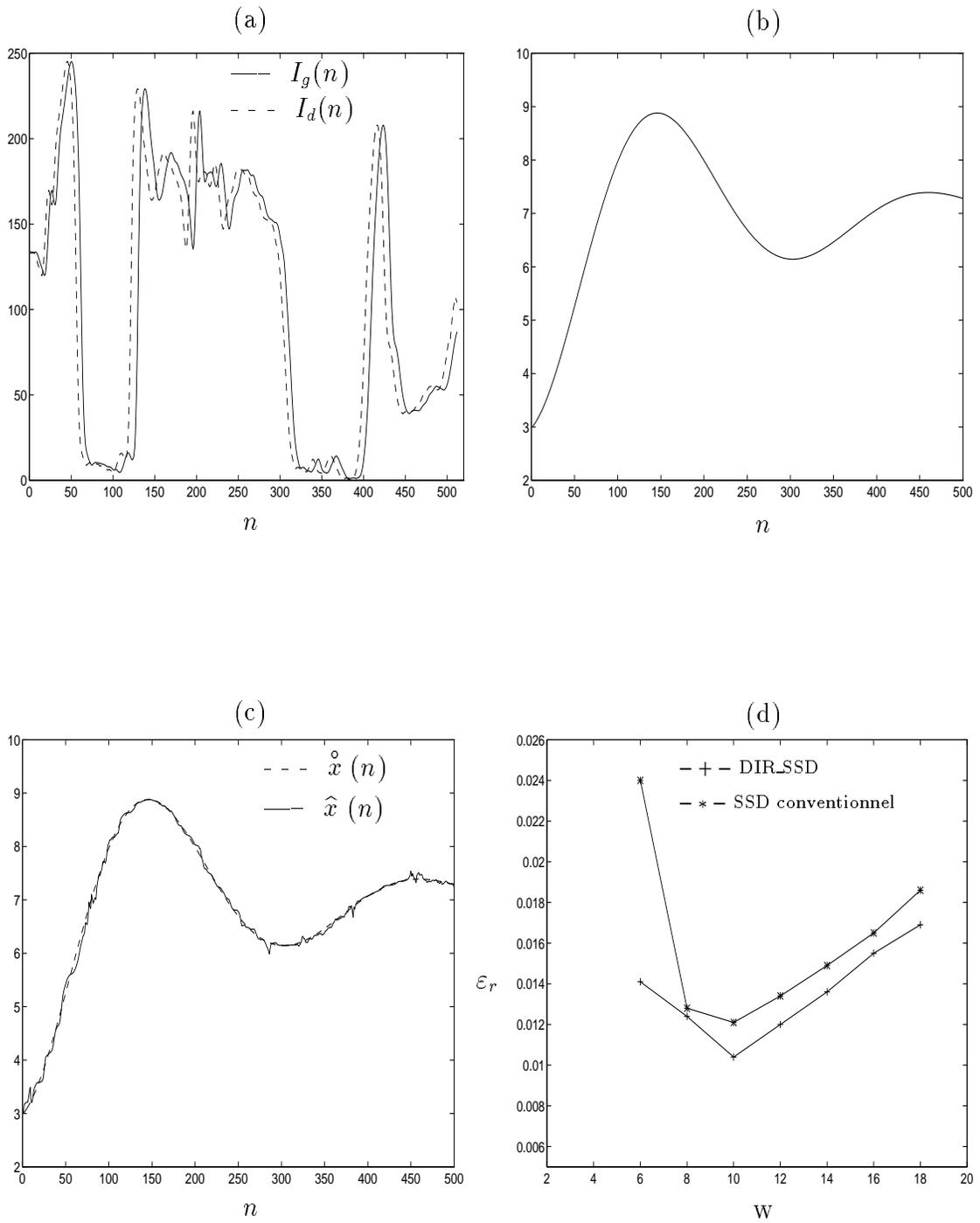


Figure 6.8: Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45$ dB : (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=10$, (d) erreur ϵ_r en fonction de la largeur de la fenêtre W .

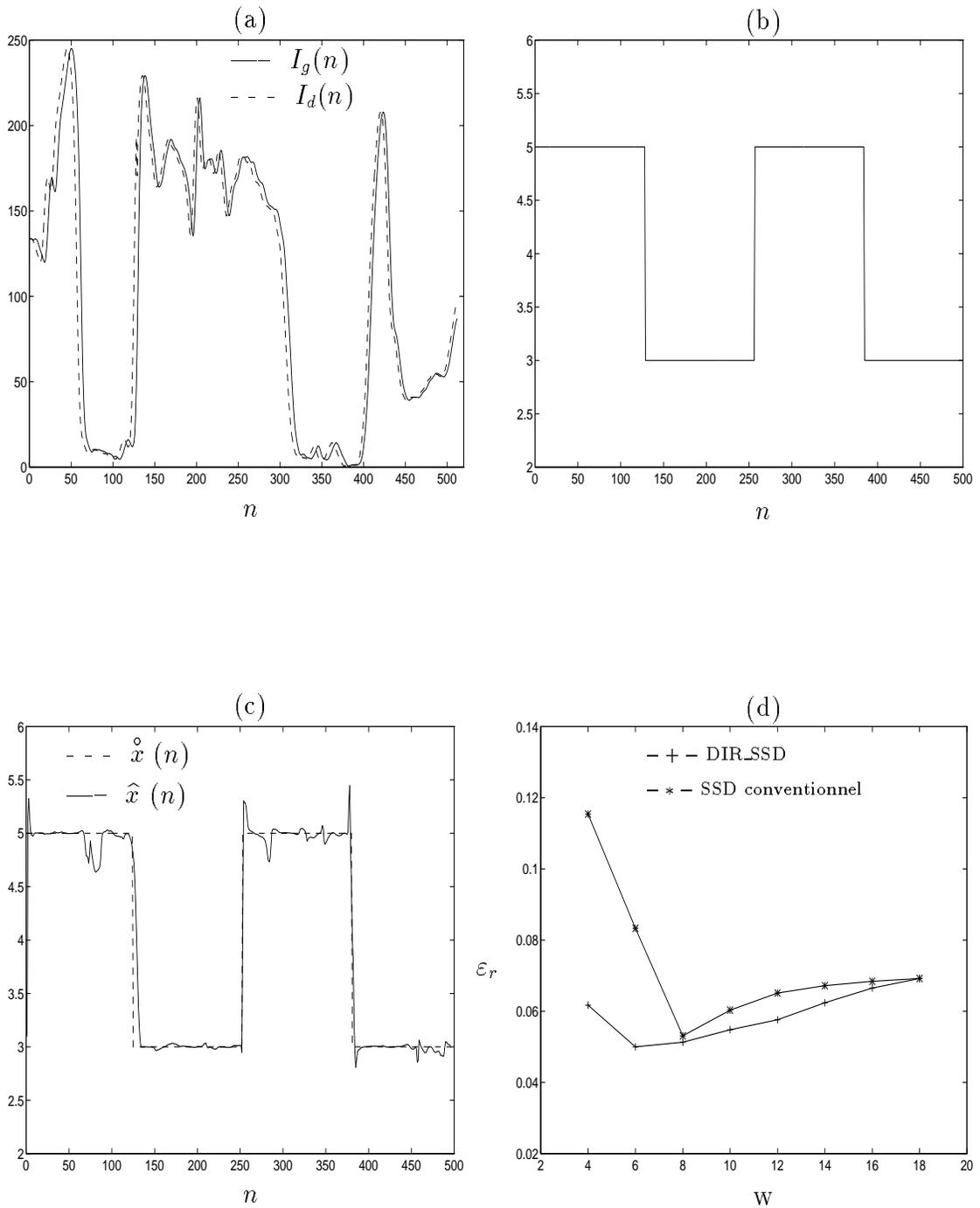


Figure 6.9: Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45 \text{ dB}$: (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=6$, (d) erreur ϵ_r en fonction de la largeur de la fenêtre W .

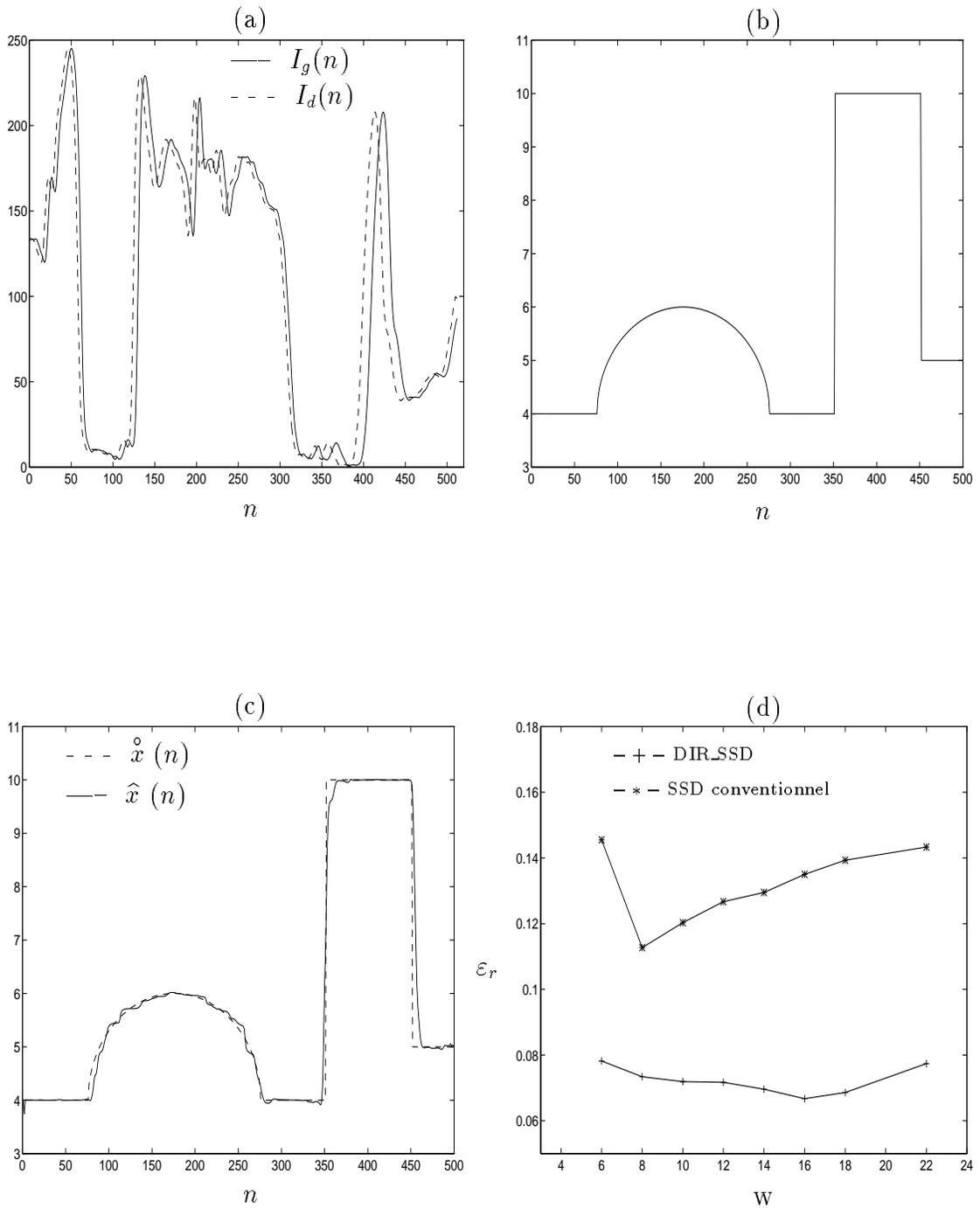


Figure 6.10: Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données synthétiques pour $N = 512$, $\sigma_h^2 = 4$, $SNR = 45 \text{ dB}$: (a) images synthétiques $I_g(n)$ et $I_d(n)$, (b) disparité exacte $\hat{x}(n)$, (c) résultat d'estimation $\hat{x}(n)$ avec $W=16$, (d) erreur ϵ_r en fonction de la largeur de la fenêtre W .

6.5.2 Résultats avec les données réelles

À cause des bonnes performances offertes par l'algorithme DIR_SSD, nous l'avons appliqué sur des signaux obtenus à partir d'images stéréoscopiques réelles. Les figures 6.11 et 6.12 représentent respectivement les images stéréoscopiques gauche et droite. Notons qu'il n'y a aucun prétraitement qui a été effectué sur ces images. Les signaux de l'intensité de la lumière des lignes de balayage correspondants, et qui sont marqués par une ligne noire sur chaque image originale, sont présentés aux figures 6.13.(a) et 6.13.(b). Le résultat d'estimation de la disparité pour ces deux lignes est donné à la figure 6.13.(c). Les figures 6.14 et 6.15 représentent la disparité, sous forme d'une image, entre les deux images stéréoscopiques pour deux valeurs du largeur du fenêtre W ($W=15$ et 30). Sur ces deux images, les valeurs de la disparité ont été normalisées afin de pouvoir détecter les régions où nous avons de grandes variations de la disparité (niveau de gris grand) par rapport aux faibles variations (niveau de gris faible). Nous pouvons remarquer que pour $W=15$, les valeurs estimées de la disparité présentent plus de discontinuités que pour $W=30$. Ceci s'explique par le fait que dans les régions de grandes disparité, la valeur W choisi n'est pas suffisante pour introduire toute l'information sur les variations de la luminance à l'intérieur de la fenêtre. Ainsi, la correspondance ne se fera pas aux bonnes positions et l'estimation de la disparité sera incorrecte.



Figure 6.11: Images stéréoscopiques réelles : image gauche



Figure 6.12: Images stéréoscopiques réelles : image droite

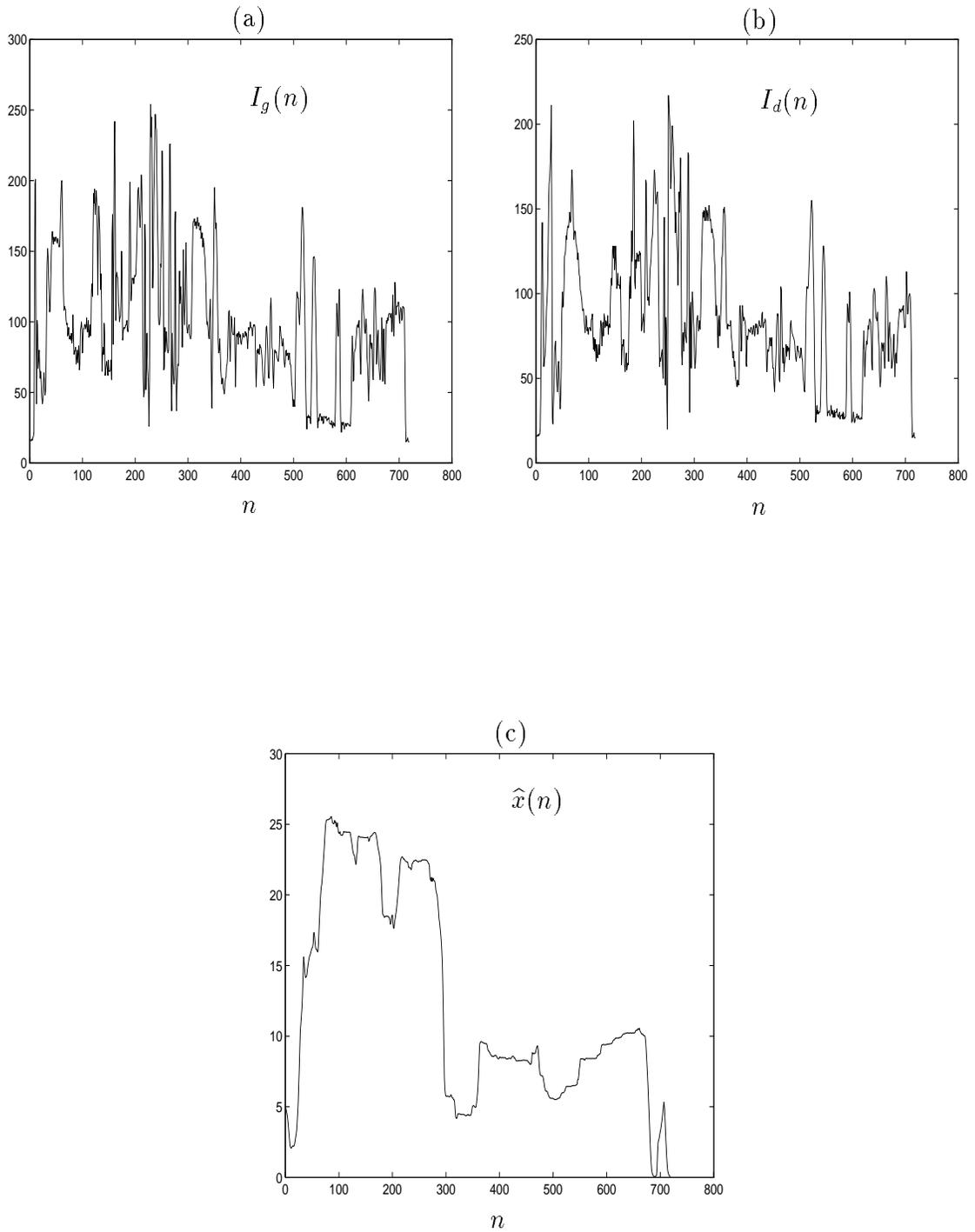


Figure 6.13: Étude de l'algorithme DIR_SSD avec les données réelles pour $N = 720$, $\sigma_h^2 = 4$, (a) ligne gauche $I_g(n)$, (b) ligne droite $I_d(n)$, (c) disparité estimée avec $W=30$.

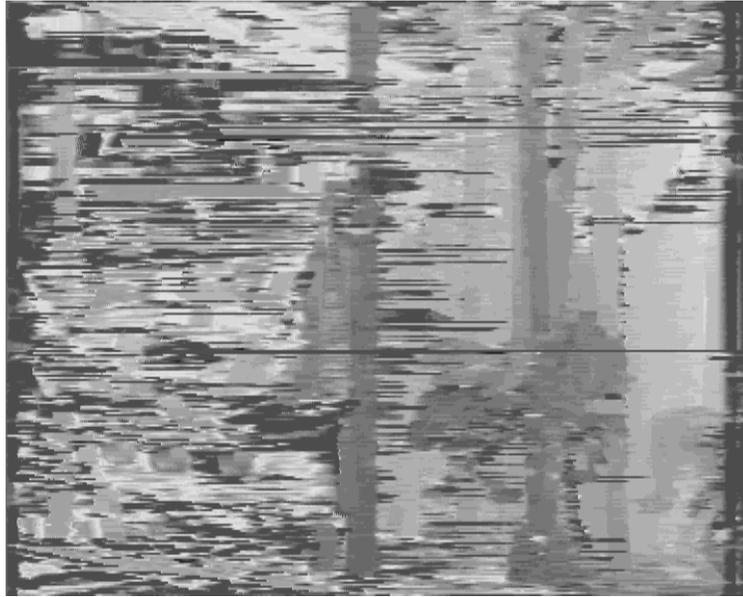


Figure 6.14: Disparité entre les deux images stéréoscopiques réelles obtenu avec DIR_SSD avec $W=15$ et $\sigma_h^2 = 4$.

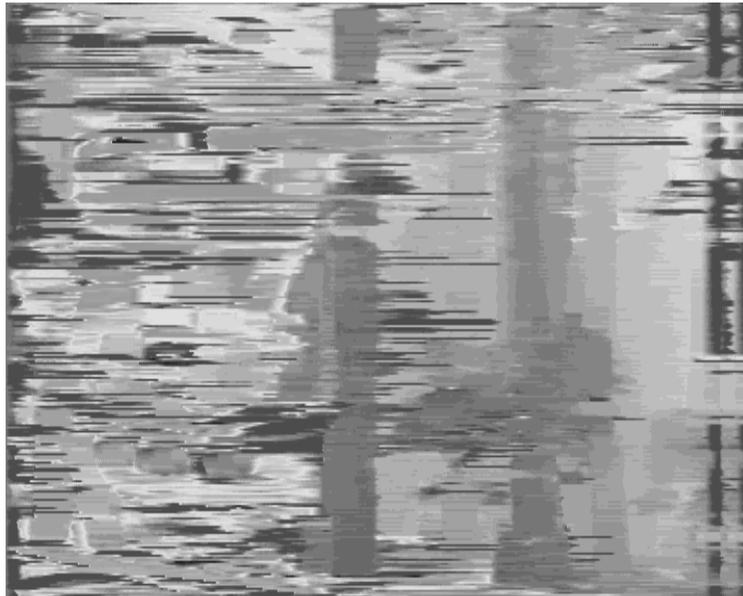


Figure 6.15: Disparité entre les deux images stéréoscopiques réelles obtenu avec DIR_SSD avec $W=30$ et $\sigma_h^2 = 4$.

6.6 Comparaison des algorithmes proposés avec les algorithmes de référence

Dans ce paragraphe nous présentons une comparaison de l'exactitude des algorithmes proposés TIKH_SSD et DIR_SSD avec les algorithmes de référence exposés dans le chapitre 4 § 4.2.1, à savoir la technique SSD conventionnelle et l'algorithme avec la régularisation de Tikhonov, pour les données synthétiques. La comparaison se fera en terme d'exactitude d'estimation de la fonction de disparité.

Les tableaux 6.1 – 6.3 donnent pour chaque fonction de disparité montrées sur les figures 6.7.(b), 6.8.(b), 6.9.(b)), les valeurs de l'erreur d'estimation relative ε_r pour différentes niveaux de bruit de mesure ($SNR = \infty, 45, 35 \text{ dB}$).

Les valeurs de l'erreur d'estimation pour les deux algorithmes proposés et la technique SSD conventionnelle correspondent aux valeurs optimales de la largeur du fenêtre W , alors que pour l'algorithme avec régularisation de Tikhonov elles correspondent aux valeurs optimales du paramètre de régularisation α .

Algorithme d'estimation	ε_r		
	$SNR = \infty \text{ dB}$	$SNR = 45 \text{ dB}$	$SNR = 35 \text{ dB}$
TIKH_SSD	0.1350	0.1540	0.1620
DIR_SSD	0.0034	0.0083	0.0224
SSD conventionnelle	0.0072	0.0122	0.0270
Tikhonov	0.0065	0.0103	0.0358

Tableau 6.1: Erreur d'estimation (ε_r) pour la fonction de disparité présentée à la figure 6.7.(b)

L'algorithme DIR_SSD offre les meilleurs résultats d'estimation en comparaison avec les autres algorithmes. L'amélioration en terme de l'exactitude d'estimation est de l'ordre de 20 à 30 %.

Pour l'algorithme TIKH_SSD, bien qu'il ne donne pas de bons résultats quand

Algorithme d'estimation	ε_r		
	$SNR = \infty \text{ dB}$	$SNR = 45 \text{ dB}$	$SNR = 35 \text{ dB}$
TIKH_SSD	0.1420	0.1525	0.1650
DIR_SSD	0.0078	0.0104	0.0202
SSD conventionnelle	0.0090	0.0121	0.0254
Tikhonov	0.0097	0.0123	0.0382

Tableau 6.2: Erreur d'estimation (ε_r) pour la fonction de disparité présentée à la figure 6.8.(b)

Algorithme d'estimation	ε_r		
	$SNR = \infty \text{ dB}$	$SNR = 45 \text{ dB}$	$SNR = 35 \text{ dB}$
TIKH_SSD	0.4142	0.4900	0.5130
DIR_SSD	0.0390	0.0500	0.0725
SSD conventionnelle	0.0434	0.0531	0.0919
Tikhonov	0.0518	0.0753	0.1016

Tableau 6.3: Erreur d'estimation (ε_r) pour la fonction de disparité présentée à la figure 6.9.(b)

la disparité est discontinue (tableau 6.3), il ne nécessite pas beaucoup de temps de calcul. Alors, nous pouvons utiliser les résultats obtenus avec cet algorithme comme estimés initiaux de la disparité pour l'algorithme DIR_SSD, l'algorithme du gradient ou l'algorithme avec la régularisation de Tikhonov, ce qui permettra de réduire le nombre d'itérations.

En comparaison avec la technique SSD conventionnelle, l'introduction du filtre auxiliaire (algorithme DIR_SSD) semble améliorer la stabilité de la solution et la rendre moins sensible au bruit de mesure. En termes de complexité (temps de calcul), les deux algorithmes sont de même ordre de grandeur.

Dans le cas où la disparité est discontinue (tableau 6.3), l'algorithme d'estimation avec la régularisation de Tikhonov ne donnent pas de bons résultats par rapport à la technique SSD et à DIR_SSD. Nous pouvons expliquer cela par le fait que nous avons utilisé une contrainte de lissage sur la disparité supposée continue, alors qu'elle ne l'est pas en réalité. En conséquence, les valeurs de la disparité à proximité des régions de discontinuités ne seront pas estimées correctement. Notons que cet algorithme nécessite beaucoup d'itérations, plus que l'algorithme DIR_SSD, pour arriver à un bon estimé.

Chapitre 7

CONCLUSION

L'objectif principal de la thèse consistait à apporter une contribution à la qualité d'un outil métrologique par l'application des méthodes avancées de traitement de signaux.

Notre contribution méthodologique et algorithmique au problème de la reconstitution de mesurandes dynamiques, consiste essentiellement en:

- le traitement uniforme de deux applications différentes traditionnellement comme cas particulier d'un problème plus général de reconstitution de mesurandes dynamiques;
- le développement de nouveaux algorithmes de reconstitution utilisant la régularisation multiple.

Les résultats de ce travail de recherche ont été appliqués dans le domaine de la spectrométrie (amélioration de la résolution des analyses spectrométriques) et dans le domaine de télécommunication (analyse de la disparité des images stéréoscopiques). Les algorithmes de reconstitution développés ont permis l'amélioration de la qualité des mesures pour ces deux applications.

7.1 Contribution méthodologique

La contribution méthodologique s'exprime essentiellement par:

- un traitement uniforme des problèmes de reconstitution de mesurandes en métrologie et en télécommunication;
- une approche uniforme d'étude des algorithmes de reconstitution pour les deux applications basée sur l'utilisation de données synthétiques et expérimentales;
- le développement d'une base algorithmique pour les études comparatives à l'avenir.

7.2 Contribution algorithmique

La contribution algorithmique consiste essentiellement en le développement de quatre nouveaux algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques avec régularisation multiple: deux pour l'application en spectrométrie et deux pour l'application en télécommunication.

7.2.1 En spectrométrie

Dans le but d'améliorer la résolution des analyses spectrométriques, nous avons proposé deux nouveaux algorithmes variationnels de reconstitution de mesurande dynamique. Ils sont basés sur l'approximation du mesurande par des fonctions splines cubiques combinée avec l'utilisation de la régularisation multiple qui associe les contraintes physiques caractérisant la classe des mesurandes à reconstituer. En particulier:

- L'algorithme OPT_SPL [60] est basé sur une méthode d'optimisation non linéaire avec contraintes. Il offre d'excellents résultats de reconstitution comparativement aux autres algorithmes de référence utilisés. Cependant, il nécessite

un calcul fort complexe et un temps de traitement et un espace de mémoire très important.

- L'algorithme KAL_SPL [73] est basé sur l'utilisation du filtre de Kalman. Cet algorithme offre notamment la possibilité d'un traitement en ligne nécessaire pour une reconstitution en temps réel. En comparaison avec les algorithmes de référence utilisés en spectrométrie, cet algorithme est beaucoup moins complexe: il permet de réduire le temps de calcul tout en conservant une bonne exactitude. L'idée de l'utilisation de la convolution de deux fonctions $g^+(\lambda) * g^-(\lambda)$ pour approximer la réponse impulsionnelle $g(\lambda)$ permet d'élargir la classe des applications spectrométriques.

Les résultats obtenus pour des données spectrométriques réelles confirment l'efficacité des algorithmes proposés: ils permettent une amélioration de la résolution des analyses spectrométriques d'au moins d'un facteur de 10 [82].

Bien que l'application de ces algorithmes a été effectuée seulement dans le domaine de la spectrométrie et chromatographie, nous pouvons les utiliser aussi dans d'autres champs d'applications métrologiques importants telles que la correction dynamique des capteurs d'instrumentation, l'interprétation des données sismiques, où le même type de traitement de données de mesures est requis.

7.2.2 En télécommunication

Dans le but d'améliorer la qualité de reconstruction d'images stéréoscopiques, nous avons proposé deux algorithmes de reconstitution de la disparité des images. L'idée de base de ces algorithmes consiste à appliquer un filtre auxiliaire de type passe-bas sur le modèle de données de sorte que nous faisons le transfert de la disparité de l'image à ce filtre en utilisant certaines suppositions. L'estimation de la disparité se fera à partir de ce filtre. Les deux algorithmes proposés utilisent la technique de mise en correspondance par bloc, en particulier:

- L'algorithme TIKH_SSD est basé sur la combinaison d'une approche variationnelle, utilisant la méthode de reconstitution avec la régularisation de Tikhonov pour déterminer le filtre auxiliaire décalé par la disparité recherchée, et une approche itérative de l'implantation de la technique SSD pour déterminer la disparité à partir de ce filtre décalé. L'avantage de cet algorithme repose sur le fait qu'il n'utilise aucune interpolation ni différentiation de l'image d'où une grande réduction de la complexité et du temps de calcul. Cependant, il est limité à de faibles variations de la disparité.
- L'algorithme DIR_SSD est basé sur la technique SSD. L'introduction du filtre auxiliaire dans cette technique a permis d'améliorer l'exactitude de l'évaluation de la disparité de l'ordre de 20 à 30% par rapport aux algorithmes de référence utilisés, et a permis aussi de réduire la sensibilité de l'estimation de la disparité face au bruit de mesure.

7.3 Perspectives de développements futurs

7.3.1 En spectrométrie

Les algorithmes de reconstitution de mesurandes dynamiques développés dans cette thèse supposent que les données sont stationnaires et que la réponse impulsionnelle est connue et invariante. Mais, dans certaines situations pratiques ces suppositions ne peuvent pas être réalisées, on est alors conduit à des problèmes de reconstitution non stationnaires. Se pose donc le problème d'adaptation des algorithmes de reconstitution à ce genre de situations. Dans le cas où nous connaissons à l'avance les caractéristiques de la non-stationnarité des données et de la variation de la réponse impulsionnelle, nous pouvons encore utiliser l'algorithme KAL_SPL basé sur le filtre de Kalman puisque ce dernier est adapté à un environnement non-stationnaire. Dans le cas contraire, le modèle de données de mesure sera représenté par une série de fonctionnelles de Volterra, qui nécessite des méthodes non linéaires pour reconstituer le mesurande.

D'autre part, dans certains cas pratiques, les résultats obtenus avec les algorithmes de reconstitution ne donnent pas une information exacte sur les amplitudes réelles des pics qui composent le mesurande. En effet, les seules informations précises que peuvent donner ces algorithmes sont les positions des pics. Nous devons donc passer par un traitement supplémentaire des résultats de reconstitution pour estimer les amplitudes exactes. En ce sens, nous pouvons utiliser la paramétrisation de $\{\tilde{y}_n\}$ par:

$$\hat{y}_n = \hat{y}(\lambda_n) = \sum_{i=1}^K A_i g(\lambda_n - \lambda_i)$$

où $g(\lambda)$ est la réponse impulsionnelle, λ_i ($i = 1, \dots, K$) sont les estimés des positions des pics obtenus à l'aide de l'algorithme de reconstitution et A_i ($i = 1, \dots, K$) sont les amplitudes à estimer. L'estimation des amplitudes peut se faire soit en utilisant une méthode d'optimisation qui consiste à minimiser la norme de l'erreur $(\hat{y}_n - \tilde{y}_n)$, soit en utilisant le filtre de Kalman appliqué à un modèle d'état généré à partir de la relation précédente.

Nous avons vu que la reconstitution repose sur l'exploitation judicieuse de l'information *a priori* sur le mesurande à reconstituer (fonctions splines, positivité, etc.). Nous pouvons envisager d'introduire dans les algorithmes d'autres contraintes de la classe de solution telles que avoir un support borné, spectre limité, capable d'améliorer encore les performances de ces algorithmes. L'introduction de telles contraintes dans l'algorithme KAL_SPL peut se faire facilement vu que nous avons l'accès directement aux échantillons du mesurande durant chaque itération.

La présence du bruit de mesure constitue souvent une limitation sur les performances des algorithmes de reconstitution. En effet, les résultats de reconstitution présentent des artéfacts qui sont causés par l'amplification des composantes hautes fréquences du bruit. Il faudrait donc améliorer la robustesse des algorithmes par rapport aux variations des réalisations du bruit.

7.3.2 En télécommunication

Les algorithmes de reconstitution de disparité développés dans cette thèse se basent sur des hypothèses concernant les conditions de prise de vues, entre autre les conditions d'éclairages qui devraient être identique afin d'utiliser l'hypothèse d'invariance de luminance dans les deux vues. Dans certains cas pratiques, ce dernier hypothèse n'est pas satisfait. Pour surmonter ce problème, nous pouvons envisager d'ajouter dans la fonction objective de minimisation de l'algorithme DIR_SSD, un terme qui tente de compenser pour les différences d'éclairages.

Pour améliorer les performances des algorithmes, dans le cas de grandes valeurs de disparité, nous pouvons envisager l'utilisation de l'approche multirésolution où nous pouvons travailler sur des images de différents niveaux de résolution. Dans ce cas, les résultats de reconstitution obtenus pour un niveau de résolution serviront comme estimés initiaux pour le niveau le plus haut. Ainsi, nous pouvons avoir une bonne initialisation de la disparité et par la suite avoir de meilleurs résultats.

Dans les algorithmes développés, la largeur de la fenêtre W reste fixe pour toutes les lignes de balayage. Elle prend parfois des valeurs assez grande afin d'introduire plus d'informations sur les grandes variations de la disparité. Si la fenêtre est petite et la variation de la disparité est grande, les résultats de reconstitution peuvent être erronés car nous ne disposons pas de toute l'information à l'intérieur de la fenêtre. Pour surmonter le problème du choix de la valeur optimale de W , nous pouvons envisager l'utilisation d'une largeur de fenêtre adaptative comme l'ont proposé Okutomi *et al.* [71].

Bibliographie

- [1] L. Finkelstein, "Fundamental concept of measurement: Definitions and scales," *Measurement & Control*, vol. 8, Mar. 1975.
- [2] Norme Nationale du Canada, *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie*. Canada, 1987.
- [3] P. H. Sydenham, *Handbook of Measurement Science*. Vol.1, Wiley, Chichester, 1982.
- [4] P. H. Sydenham, *Handbook of Measurement Science*. Vol.2, Wiley, Chichester, 1983.
- [5] L. Finkelstein, "Measurement and instrumentation science – an analytical review," *Measurement, Journal of IMEKO (Special Issue)*, vol. 14, no. 1, 1994.
- [6] A. Barwicz, "A system approach to electric measurement helps in understanding the measurement methods," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-34, Dec. 1985.
- [7] A. Barwicz, "System approach to electrical measurement," in *Proc. IEEE Instr. & Meas. Techn. Conference*, (Irvine, 14-16 May 1993), pp. 397–402, 1993.
- [8] R. Z. Morawski, "Unified approach to measurand reconstruction," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-43, pp. 226–231, Apr. 1994.
- [9] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Univ. Princeton, 1902.
- [10] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenine, *Solutions of Ill-Posed Problems*. Wiley/Winston, London, 1977.
- [11] R. Z. Morawski, L. Lemire, M. Ben Slima, and A. Barwicz, "The use of splines for static calibration of electronic measuring systems : A comparative study," in *Proc. IEEE Instr. & Meas. Techn. Conference*, (Atlanta, 14-16 May 1991), pp. 202–208, 1991.
- [12] R. Z. Morawski, A. Podgorski, and K. Sutkowski, "Dynamic calibration of measurement channels using algorithms of non-differentiable optimization," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-41, pp. 881–884, Dec. 1992.
- [13] D. R. Audley and D. A. Lee, "Ill-posed and well-posed problems in system identification," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, pp. 738–747, Dec. 1974.

- [14] F. D. Coulon, *Théorie et traitement des signaux*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1984.
- [15] V. K. Arya and H. D. Holden, "Deconvolution of seismic data - an overview," *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, vol. GE-16, pp. 95–98, Apr. 1978.
- [16] A. J. Berkhout, *Seismic Resolution - A Quantitative Analysis of Resolving Power of Acoustical Echo Techniques*. Geophysical Press, London-Amsterdam, 1984.
- [17] W. Menke, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press, London, 1984.
- [18] N. Saito, "Superresolution of noisy band-limited data by data adaptive regularisation and its application to seismic trace inversion," in *Proc. IEEE ICASSP Conference*, (New Mexico, 3-6 Apr. 1990), pp. 1237–1240, 1990.
- [19] P. A. Jansson, *Deconvolution with Application in Spectroscopy*. Academic Press, London, 1984.
- [20] R. Z. Morawski, M. Ben Slima, M. Milewski, and A. Barwicz, "Application of digital signal processor for correction of spectrophotometric data," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-42, pp. 778–782, Jun. 1993.
- [21] R. F. Lacey, "Deconvolution of overlapping chromatographic peaks," *Anal. Chemistry*, vol. 58, no. 7, pp. 1404–1410, 1986.
- [22] P. B. Crilly, "A quantitative evaluation of various iterative deconvolution algorithms," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-40, pp. 558–562, Jun. 1991.
- [23] H. C. Andrews and B. R. Hunt, *Digital Image Restoration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1977.
- [24] G. Demoment, "Image reconstruction and restoration - overview of common estimation structures and problems," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. 37, pp. 2024–2036, Dec. 1989.
- [25] J. Biemond, R. L. Lagendijk, and R. Mersereau, "Iterative methods for image deblurring," *Proc. IEEE*, vol. 78, pp. 856–883, May 1990.
- [26] S. V. H. Quershi, "Adaptive equalization," *Proc. IEEE*, vol. 73, no. 9, pp. 1349–1387, 1985.
- [27] G. L. Besnerais, J. Navaza, and G. Demoment, "Synthèse d'ouverture en radio-astronomie par maximum d'entropie sur la moyenne," in *Actes du 13ième colloque GRETSI*, (Juan-les-pins, 16-20 Sep. 1991), pp. 217–220, 1991.
- [28] K. Hejn and A. Lesniewski, "Digital correction of the dynamic error arising in the input circuits of the measuring instruments," in *Proc. 4th Int. IMEKO-TC7 Symp. Meas. & Estim.*, (Bressanone, 8-12 May 1984), pp. 51–60, 1984.
- [29] A. Bennis and N. S. Nahman, "Deconvolution of causal pulse and transient data," in *Proc. IEEE Instr. & Meas. Techn. Conference*, (San José, 13-15 Feb. 1990), pp. 251–254, 1990.
- [30] E. R. Carson and C. Cobelli, "Model-based measurement in physiology and clinical medicine," *Measurement Journal of IMEKO*, vol. 3, pp. 59–71, Apr.-Jun. 1985.

- [31] S. Cerutti, G. Baselli, and D. Liberati, "Processing of biological signals by means of linear filtering and parametric identification," *Biocybernetics and Biomedical Eng.*, vol. 7, no. 1-4, pp. 69-86, 1987.
- [32] M. Bertero, T. A. Poggio, and V. Torre, "Ill-posed problems in early vision," *Proc. IEEE*, vol. 76, pp. 869-889, Aug. 1988.
- [33] R. March, "Computation of stereo disparity using regularization," *Pattern Recognition Letters*, vol. 8, pp. 181-187, Oct. 1988.
- [34] L. Matthies, "Stereo vision for planetary rovers: Stochastic modeling to near real-time implementation," *Int. Journal of Computer Vision*, vol. 8, no. 1, pp. 71-91, 1992.
- [35] Y. G. Biraud, "Les méthodes de déconvolutions et leurs limitations fondamentales," *Revue de Physique appliquée*, vol. 11, pp. 203-214, Mar. 1976.
- [36] R. Prost and R. Goutte, "Deconvolution when the convolution kernel has no inverse," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. ASSP-25, pp. 542-549, Dec. 1977.
- [37] G. Demoment, "Déconvolution des signaux," Tech. Rep. L2S 20/84, Laboratoires des signaux et systèmes CNRS/ESE, France, 1985.
- [38] R. Z. Morawski, "Basic problems of measurement signal reconstruction," in *Proc. Australien Inst. and Meas. Conference*, (Adelaide 14-16 Nov. 1989), 1989.
- [39] H. J. Trussell and M. R. Civanlar, "The feasible solution in signal restoration," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 201-212, Apr. 1984.
- [40] M. I. Sezan *et al.*, "Regularized signal restoration using the theory of convex projections," in *Proc. IEEE ICASSP Conference*, (Texas, 6-9 Apr. 1987), pp. 36.4.1-36.4.4, 1987.
- [41] M. Z. Nashed, "Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory," *IEEE Trans. Anten. Propag.*, vol. AP-29, pp. 220-231, 1981.
- [42] G. Demoment and D. Saint-Felix, "Déconvolution en temps réel par une méthode sous-optimale rapide," *Ondes et Signal*, no. 76, pp. 133-147, 1983.
- [43] H. J. Trussell, "Maximum power signal restoration," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. 29, no. 5, pp. 1059-1061, 1981.
- [44] S. F. Gull and J. Skilling, "Maximum entropy method in image processing," *IEE Proc. F.*, vol. 131, no. 6, pp. 646-659, 1984.
- [45] R. Z. Morawski and A. Miekina, "Noise reduction in spectrophotometric data processing using Tikhonov's regularisation," in *Proc. 1st Int. IMEKO-TC4 Symp. on Noise in Elec. Meas.*, (Coms, 19-21 Jun. 1986), pp. 217-222, 1986.
- [46] D. L. Phillips, "A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind," *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 9, pp. 84-97, 1962.
- [47] S. Twomey, "On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by inversion of the linear systems produced by quadrature," *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 10, pp. 97-101, 1963.

- [48] B. R. Hunt, "The application of constrained least-squares estimation to image restoration by digital computer," *IEEE Trans. Computers*, vol. 22, no. 9, pp. 805–812, 1973.
- [49] P. Moulin, "An adaptive spline method for signal restoration," in *Proc. IEEE ICASSP Conference*, (San Fransisco, 23-26 Mar. 1992), pp. 169–172, 1992.
- [50] G. Demoment, R. Reynaud, and A. Herment, "Fast minimum variance deconvolution," in *Proc. IEEE ICASSP Conference*, (San Diego, 19-21 Mar. 1984), pp. 28B.3.1–28B.3.4, 1984.
- [51] C. Chi and J. R. Mendel, "Performance of minimum variance deconvolution filter," in *Proc. IEEE ICASSP Conference*, (San Diego, 19-21 Mar. 1984), pp. 28B.2.1–28B.2.4, 1984.
- [52] J. K. Tugnait, "Constrained signal restoration via iterated extended kalman filtering," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. 32, no. 2, pp. 472–475, 1985.
- [53] P. H. Van Cittert, "Zum Einfluss der Spaltbreit auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien II," *Z. Physik*, vol. 69, pp. 298–308, 1931.
- [54] H. Bially, "Iterative Behandlung der Linearer Functionalgleichungen," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 4, pp. 166–176, 1959.
- [55] L. Landweber, "An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind," *Am. J. Math.*, vol. 73, pp. 615–624, 1951.
- [56] B. J. Sullivan, "Ill-conditioned signal restoration and the conjugate gradient method," in *Proc. IEEE ICASSP Conference*, pp. 1213–1216, 1990.
- [57] H. J. Trussell, "Convergence criteria for iterative restoration methods," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. 31, pp. 129–136, Feb. 1983.
- [58] R. W. Schafer *et al.*, "Constrained iterative restoration algorithms," *Proc. IEEE*, vol. 69, pp. 432–450, Apr. 1981.
- [59] A. K. Katsaggelos and S. N. Efstratiadis, "A class of iterative signal restoration," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol. 38, pp. 778–786, May 1990.
- [60] M. Ben Slima, R. Z. Morawski, and A. Barwicz, "A spline-based variational method with constraints for spectrophotometric data correction," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-41, pp. 786–790, Dec. 1992.
- [61] A. Barwicz, J. L. Dion, and R. Z. Morawski, "Calibration of an electronic measuring system for ultrasonic analysis of solutions," *IEEE Trans. Instr. & Meas.*, vol. IM-39, pp. 1030–1033, Dec. 1990.
- [62] A. Guershaoui *et al.*, "Déconvolution des données du types sismiques: étude comparative de certaines méthodes," in *11ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*, (Nice, 1-5 Jun. 1987), pp. 725–728, 1987.
- [63] G. H. Golub, M. Heath, and G. Wahba, "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter," *Technometrics*, vol. 21, pp. 215–223, May 1979.

- [64] A. Miekina and R. Z. Morawski, "Incorporation of the positivity constraint into a Tikhonov-method based algorithm of measurand reconstruction," in *Proc. IMEKO-TC1& TC7 Colloquium on State and Advances of Meas.& Instr. Sci.*, (London, 8-10 Sept. 1993), pp. 299–304, 1993.
- [65] R. N. Bracewell and J. A. Roberts, "Aerial smoothing in radio astronomy," *Australian Journal of Physics*, vol. 7, pp. 615–640, 1954.
- [66] D. Massicotte, R. Z. Morawski, and A. Barwicz, "Incorporation of a positivity constraint into a Kalman-filter-based algorithm for correction of spectrophotometric data," in *Proc. IEEE Instr. & Meas. Techn. Conference*, (New York, 12-14 May 1992), pp. 590–593, 1992.
- [67] F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice Hall, New York, 1973.
- [68] S. T. Barnard and W. B. Thompson, "Disparity analysis of images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-2, pp. 333–340, Jul. 1980.
- [69] D. Terzopoulos, "Regularization of inverse visual problems involving discontinuities," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-8, pp. 413–424, Jul. 1986.
- [70] M. R. Jenkin, "Techniques for disparity measurements," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 53, pp. 14–30, Jan. 1991.
- [71] M. Okutomi and T. Kanade, "A locally adaptive window for signal matching," *Int. Journal of Computer Vision*, vol. 7, no. 2, pp. 143–162, 1992.
- [72] B. Julesz, *Foundations of Cyclopean Perception*. Univ. Chicago Press, Chicago, 1971.
- [73] M. Ben Slima, R. Z. Morawski, and A. Barwicz, "A recursive spline-based algorithm for spectrophotometric data correction," in *Proc. IEEE Instr. & Meas. Techn. Conference*, (Irvine, 18-20 May 1993), pp. 500–503, 1993.
- [74] L. L. Schumaker, *Spline Functions – Basic Theory*. J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.
- [75] O. Bensaoud and J. Oksman, "Reconstruction en temps réel de signaux à échantillonnage non périodique," *Traitement du Signal*, vol. 1, no. 3, pp. 283–293, 1994.
- [76] K. V. Subbaiah and A. Natarajan, "Derivative unfolding by spline techniques," *Nuclear Instr. & Methods in Physics Res.*, no. 22, pp. 377–386, 1985.
- [77] Y. E. Vaskoboynikov, N. G. Preobrazenski, and A. I. Sedelnikov, *Mathematical Processing of Experimental Results in Molecular Dynamics*. Nauka Pub. Novosibirsk, 1984.
- [78] V. A. Vasilenko, *Splines–Theory, Algorithms and Programs*. Nauka Pub. Novosibirsk, 1983.
- [79] A. Grace, *Optimization Toolbox For Use with MATLAB*. The Math Works Inc., 1992.
- [80] M. B. Slima, "Application des fonctions splines cubiques pour la reconstitution des signaux," Tech. Rep. Rapport réalisé dans le cadre du cours DSPII, INRS-Télécommunications, 1992.

- [81] C. F. Gerald, *Applied numerical analysis*. Addison Wesley, USA, 1970.
- [82] A. Barwicz, M. Ben Slima, D. Massicotte, R. Z. Morawski, and C. Thellen, "Improving the resolution of analytical instrument in environmental laboratories," in *Proc. IEEE Instr. & Meas. Techn. Conference*, (Hamamatsou, 10-14 May 1994), pp. 454-457, 1994.
- [83] Y. Ohta and T. Kanade, "Stereo by intra- and inter-scanline search using dynamic programming," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-7, pp. 139-154, Mar. 1985.
- [84] D. Marr and T. Poggio, "Cooperative computation of stereo disparity," *Science*, vol. 194, no. 4262, pp. 283-287, 1976.
- [85] M. Okutomi, O. Yoshizaki, and G. Tomita, "Color stereo matching and its application to 3-d measurement of optic nerve head," in *11th IAPR, Int. Conf. on Pattern Recognition*, (Hague 30-3 Sep. 1992), pp. 509-513, 1992.
- [86] N. M. Nasrabadi and Y. Liu, "Stereo vision correspondence using a multichannel graph matching technique," *Image and Vision Computing*, vol. 17, pp. 237-245, Nov. 1989.
- [87] M. Alami, A. Osorio, and L. Peralta, "Stereoscopie passive avec des arcs de cercle," in *11ième Colloque GRETSI*, (Nice, 1-5 Jun. 1987), pp. 527-530, 1987.
- [88] B. D. Lucas and T. Kanade, "An iterative image registration technique with an application to stereo vision," in *Proc. 7th Int. Joint Conf. Artificial Intell.*, (Vancouver, 12-14 Aug. 1981), pp. 674-679, 1981.
- [89] R. March, "A regularization model for stereo vision with controlled continuity," *Pattern Recognition Letters*, vol. 10, pp. 259-263, Oct. 1989.
- [90] N. Yokoya, "Surface reconstruction directly from binocular stereo images by multiscale-multistage regularization," in *11th IAPR, Int. Conf. on Pattern Recognition*, (Hague, 30-3 Sep. 1992), pp. 642-646, 1992.
- [91] W. E. L. Grimson, *From images to surfaces: a computational study of the human early visual system*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1981.
- [92] S. Haykin, *Communication Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.